



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών
Οικονομίας και Πληροφορικής

21^ο Πρόβλημα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης σε τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ είναι ίση με -2 . Για την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f ισχύουν τα εξής:

- Η C_f διέρχεται από το $A(0,3)$
- Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι παράλληλη με τον $x'x$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Δίνονται τα σημεία $A(x,0)$, $B(x,f(x))$ και τα συμμετρικά τους Γ και Δ αντίστοιχα ως προς τον άξονα $y'y$ με $x \in [0, \sqrt{3}]$. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ μεγιστοποιείται.

γ) Για την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του $AB\Gamma\Delta$.

δ) Έστω μία συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο $AB\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει και τις δύο διαγώνιους τους $AB\Gamma\Delta$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(E(x)-4)}{E^2(x)-8E(x)+16}$ όπου $E(x)$ η συνάρτηση εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$.

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ



Λύση 20^{ου} Προβλήματος

Έστω ΚΛΜΝ το εγγεγραμμένο ορθογώνιο με $M(x,y)$ στο πρώτο τεταρτημόριο . Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $ΚΛ=2x$ και $ΛΜ=2y$ και το εμβαδόν του

$E = 2x \cdot 2y = 4xy$ Επειδή $x,y>0$ το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο όταν και το $E^2 = 16x^2y^2$

(1) γίνεται μέγιστο . Οι συντεταγμένες x,y επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1 \Leftrightarrow 18x^2 + 50y^2 = 50 \cdot 18 \Leftrightarrow y^2 = \frac{18(50 - x^2)}{50} . \text{ Με αντικατάσταση στην (1)}$$

έχουμε $E^2(x) = 16x^2 \frac{18(50 - x^2)}{50}$. Η παράγωγος είναι ίση με $\frac{16 \cdot 18}{50} 4x(25 - x^2)$

$$\frac{16 \cdot 18}{50} 4x(25 - x^2) > 0 \Rightarrow x \in (0, 5)$$

$$\frac{16 \cdot 18}{50} 4x(25 - x^2) < 0 \Rightarrow x \in (5, +\infty)$$

Άρα έχουμε μέγιστο για $x=5$ άρα $y=3$ και οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $ΚΛ=2x=10$ $ΛΜ=2y=6$

