ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

24ο Πρόβλημα

Δίνεται η καμπύλη $y=\sqrt{x^2-2x+9}-3$ και το σημείο Α(2,0). Να βρεθεί σημείο Μ της καμπύλης στο διάστημα [0,2] και στο διάστημα [3,5] ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΑ να είναι ελάχιστο , όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Λύση 23^{ου} Προβλήματος

Η απόσταση του σημείου $M(x,e^{x-1})$ από την αρχή των αξόνων είναι

$d(x)=\sqrt{x^2+f^2(x)}=\sqrt{x^2+e^{2(x-1)}},x\geq 0$ άρα ως συνάρτηση του χρόνου

$d(t)=\sqrt{x^2(t)+f^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+e^{2(x(t)-1)}},x\geq 0$.

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε ότι $d(t_0)=\sqrt{2}$

$d(x)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+e^{2(x-1)}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+e^{2(x-1)}=2\Leftrightarrow x^2+e^{2(x-1)}=2\Leftrightarrow x^2+e^{2(x-1)}-2=0$. Η x=1 είναι προφανής ρίζα. Έστω $h(x)=x^2+e^{2(x-1)}-2,x\geq 0$.

$h'(x)=\left(x^2+e^{2(x-1)}-2\right)'=2x+2e^{2(x-1)}>0,x\geq 0$. Άρα $h\nearrow[0,+\infty)$, άρα x=1 μοναδική ρίζα της h(x)=0.

$d'(t)=\left(\sqrt{x^2(t)+e^{2(x(t)-1)}}\right)'=\dfrac{2x(t)x'(t)+2e^{2(x(t)-1)}\cdot x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+e^{2(x(t)-1)}}}=\dfrac{x(t)+e^{2(x(t)-1)}}{d(t)}x'(t)$ Άρα

$$d'(t_0)=\frac{x(t_0)+e^{2(x(t_0)-1)}}{d(t_0)}x'(t_0)=\frac{1+e^0}{\sqrt{2}}3\sqrt{2}=6m/s$$