ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

25ο Πρόβλημα

Δίνεται μία σφαίρα ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$.

α) Να εγγραφεί εντός αυτής ορθός κύλινδρος με τον μεγαλύτερο όγκο.

β) Να περιγραφεί εκτός αυτής ορθός κώνος με τον μικρότερο όγκο .

γ) Ένας ορθός κώνος έχει ύψος ΑΟ=18cm και ακτίνας βάσης ΟΒ=6cm.

Να βρεθεί η ακτίνα R και το ύψος h του εγγεγραμμένου ορθού κυλίνδρου που έχει τον μεγαλύτερο δυνατό όγκο .

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Λύση 24ου Προβλήματος

Έστω Μ(x,y) το ζητούμενο σημείο . Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΑ είναι $(\mathrm{MOA})=\frac{1}{2}\beta\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 2|y|=|y|$. Για την εύρεση του προσήμου της $y=\sqrt{x^2-2x+9}-3$ εργαζόμαστε ως εξής:

$y=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+9}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+9}=3\Rightarrow x=0,x=2$ οι οποίες είναι μοναδικές ρίζες άρα $y\neq 0$ για κάθε $x\neq 0,x\neq 2$ άρα η y διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,2),(2,+\infty)$ αφού είναι συνεχής σε αυτά και επειδή για x=1

$y(1)=\sqrt{8}-3<0$ στο διάστημα [0,2] θα έχουμε ότι y<0 άρα $|y|=-y$, άρα $E(x)=3-\sqrt{x^2-2x+9}$, η συνάρτηση του εμβαδού .

$E'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+9}}$. $E'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+9}}=0\Rightarrow x=1$

$E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+9}}>0\Rightarrow x<1\Rightarrow x\in(0,1)$ Άρα $E\uparrow(0,1]$

$E'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+9}}<0\Rightarrow x>1\Rightarrow x\in[1,2)$. Άρα $E\downarrow[1,2)$

Άρα η Ε παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το Ε(1)= $2\sqrt{2}-3$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(1,2\sqrt{2}-3\right)$

Αντίστοιχα στο διάστημα [3,5] είναι y>0 άρα $|y|=y=\sqrt{x^2-2x+9}-3$. Άρα

$E'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+9}}>0$ για κάθε $x\in[3,5]$ άρα η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο [3,5] οπότε η ελάχιστη τιμή θα είναι $E(3)=\sqrt{3^2-2\cdot 3+9}-3=2\sqrt{3}-3$.