1 Λυμένες Ασκήσεις Στις Δυνάμεις

1.1 Εισαγωγή

Ορισμός Δύναμης

Το γινόμενο $\overbrace{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha ... \cdot \alpha}}^{\nu\ \textit{παράγοντες}}$ (είτε το α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός), συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και λέγεται **δύναμη** με **βάση** το **α** και **εκθέτη** το φυσικό $\boldsymbol{\nu > 1}$

Ιδιότητες δυνάμεων

Συνέπειες Ορισμού	**Ιδιότητες δυνάμεων με ίδια βάση**	**Ιδιότητες δυνάμεων με ίδιο εκθέτη**
$\alpha^0 = 1$	$\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu} =$	$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$
$\alpha^1 = \alpha$	$\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
$\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$	$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \dfrac{\beta^{\nu}}{\alpha^{\nu}}$

Αν παρατηρήσουμε τις ιδιότητες θα διαπιστώσουμε ότι σκοπός τους είναι να μετατρέπουν τις πράξεις μεταξύ δυνάμεων σε μία δύναμη. Σύμφωνα με αυτό σε μία άσκηση δυνάμεων το τελευταίο που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις δυνάμεις. Κύριο μέλημα μας είναι να μετατρέπουμε τις πράξεις των δυνάμεων σε μία δύναμη. Συνήθως η προτεραιότητα είναι:

1. πρώτα να μετατρέπουμε τις δυνάμεις των δυνάμεων σε μία δύναμη σύμφωνα με την ιδιότητα$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$,

2. στη συνέχεια να προχωράμε στο υπολογισμός του προσήμου των δυνάμεων όπου είναι εφικτό σύμφωνα με του κανόνες

   - **Αν η βάση της δύναμης είναι θετικός αριθμός τότε και η δύναμη είναι θετικός αριθμός ανεξαιρέτως του εκθέτη.** <u>**Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$**</u>.
   - **Αν η βάση της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης άρτιος τότε η δύναμη είναι θετικός αριθμός.** <u>**Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ν άρτιος τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$**</u>.
   - **Αν η βάση της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης περιττός τότε η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός.** <u>**Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ν περιττός τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} < 0}$**</u>.

3. και ύστερα να μεταβαίνουμε στους πολλαπλασιασμούς και στις διαιρέσεις.

1.2 Λυμένες Ασκήσεις

<u>**Άσκηση 1:**</u>Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(xy^{-2})^3 (x^2 y)^{-1}}{(y^{-1})^7 : (-y)}$$

για $x = 2020$ και $y = -\frac{1}{2020}$
<u>Λύση:</u>

Στην άσκηση αυτή το τελευταίο που θα κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε τα x, y με τις τιμές που μας δίνει. Πρώτα θα πρέπει να απλοποιήσουμε την παράσταση A όσο πιο πολύ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ρίχνοντας μια ματιά στην παράσταση A, βλέπουμε ότι έχουμε δυνάμεις υψωμένες σε δυνάμεις, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$.

Η παραπάνω ιδιότητα θα εφαρμοστεί σε συνδυασμός με τις ιδιότητες γινομένου και πηλίκου δυνάμεων με κοινό εκθέτη.

1. $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu$

2 $(\frac{\alpha}{\beta})^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

Με τον τρόπο αυτό θα καταλήξουμε σε απλές δυνάμεις που συνδέονται μεταξύ τους μόνο με τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και τις διαίρεσης. Η παράσταση A γίνεται:

$$A = \frac{(xy^{-2})^3(x^2y)^{-1}}{(y^{-1})^7 : (-y)} \Rightarrow A = \frac{x^3(y^{-2})^3(x^2)^{-1}y^{-1}}{y^{-7} : (-y)} \Rightarrow A = \frac{x^3y^{-6}x^{-2}y^{-1}}{y^{-7} : (-y)}$$

Παρατηρούμε πάλι την παράσταση στο σημείο που την έχουμε φέρει και βλέπουμε ότι στον αριθμητή έχουμε πολλαπλασιασμένες δυνάμεις με τον ίδια βάση και στον παρονομαστή έχουμε διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση. Άρα έχουμε κάθε δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες

1. $\alpha^\mu\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

2. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, οπότε η παράσταση A γίνεται:

$$A = \frac{x^{3+(-2)}y^{-6+(-1)}}{-y^{-7-1}} = \frac{x^1y^{-7}}{-y^{-8}} = -\frac{x^1y^{-7}}{y^{-8}}$$

Το "-" σε ένα κλάσμα έχουμε το δικαίωμα να το μεταφέρουμε είτε στον αριθμητή, είτε στον παρονομαστή ή μπροστά από το κλάσμα. Εμείς στο παράδειγμα αυτό επιλέξαμε το κλάσμα να το πάρουμε από τον παρονομαστή και να το βάλουμε μπροστά στο κλάσμα. Κοιτάμε πάλι την παράσταση μας και βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο δυνάμεις με την ίδια βάση που διαιρούνται μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα πηλίκου δυνάμεων με ίδια βάση έχουμε:

$$A = -\frac{x^1y^{-7}}{y^{-8}} = -x^1y^{-7-(-8)} = -xy^{-7+8} = -xy^1 = -xy$$

Τώρα που έχουμε φέρει την παράστασή A στο πιο απλοποιημένο σημείο, αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$A = -xy = -2020(-\frac{1}{2020}) = 1$$

Άσκηση 2: Αν οι αριθμοι α,β είναι αντίστροφοι και οι x, y αντίθετοι ακέραιοι να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{((2^{-3})^4)^x(\beta^{-3})^2}{(4^ya)^6}$$

και

$$B = (16^{-1}a^{-2})^x(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{a}{\beta^{x-1}})^2$$

Λύση:

Πρώτα πρέπει να ερμηνέψουμε τα δεδομένα της άσκησης. Αφού α,β είναι αντίστροφοι έπεται

- $a\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$.

Επίσης αφού x, y αντίθετοι έπεται

- $x+y=0 \Rightarrow x=-y$.

Πρώτα θα απλοποιήσουμε την παράσταση Α. Βλέπουμε ότι έχουμε δύναμη σε δύναμη οπότε πάμε να κάνουμε ρήση της ιδιότητας $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$.

$$A=\frac{((2^{-3})^4)^x(\beta^{-3})^{-2}}{(4^y a)^6} \Rightarrow A=\frac{(2^{-3})^{4x}\beta^{-6}}{4^{6y}a^6} \Rightarrow A=\frac{2^{-12x}\beta^{-6}}{4^{6y}a^6}$$

Επειδή η παράσταση δεν μπορεί να απλοποιηθεί παραπάνω κάνοντας χρήση ιδιοτήτων δυνάμεων καταλαβαίνουμε ότι ήρθε η ώρα να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που βγάλαμε αναλύοντας τα δεδομένα, δηλαδή να αντικαταστήσουμε το α με το β^{-1} και το x με το $-y$.

$$A=\frac{2^{-12x}\beta^{-6}}{4^{6y}a^6} \Rightarrow A=\frac{2^{-12(-y)}\beta^{-6}}{4^{6y}(\beta^{-1})^6}$$

Μέτα την αντικατάσταση παρατηρούμε ότι πάλι δημιουργείται δύναμη σε δύναμη οπότε κάνουμε χρήση της ιδιότητας $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$.

$$A=\frac{2^{-12(-y)}\beta^{-6}}{4^{6y}(\beta^{-1})^6} \Rightarrow A=\frac{2^{12y}\beta^{-6}}{4^{6y}\beta^{-6}} \Rightarrow A=\frac{2^{12y}}{4^{6y}}$$

Έχουμε μείνει με δύο δυνάμεις που "φαινομενικά" έχουν διαφορετική βάση. Αν παρατηρήσουμε λίγο καλύτερα θα δούμε ότι το $4=2^2$. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε να δημιουργούμε δυνάμεις με ίδιες βάσεις, γεγονός που μας επιτρέπει να κάνουμε πράξεις με τους εκθέτες τους, άρα:

$$A=\frac{2^{12y}}{4^{6y}} \Rightarrow A=\frac{2^{12y}}{((2)^2)^{6y}} \Rightarrow A=\frac{2^{12y}}{2^{12y}} \Rightarrow A=1$$

Πάμε τώρα να απλοποιήσουμε την παράσταση Β. Πάμε αρχικά να αντικαταστήσουμε το α και το x, έτσι ώστε η παράσταση μας να περιέχει τουλάχιστον μόνο β και y.

$$B=(16^{-1}a^{-2})^x(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{a}{\beta^{x-1}})^2 \Rightarrow B=(16^{-1}(\beta^{-1})^{-2})^{-y}(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2$$

Βλέποντας την παράσταση παρατηρούμε ότι έχουμε δύναμη σε δύναμη αλλά και δυνάμεις που μπορούν να "σπάσουν" στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες έχουμε:

$$B=(16^{-1}(\beta^{-1})^{-2})^{-y}(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2 \Rightarrow B=(16^{-1}(\beta^{2}))^{-y}(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2 \Rightarrow$$
$$B=(16^{-1})^{-y}(\beta^2)^{-y}(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2 \Rightarrow B=(16^{y}\beta^{-2y})(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2$$

Πριν σπάσουμε τις δυνάμεις στη δεύτερη και την τρίτη παρένθεση αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι οι άρτιες δυνάμεις 'εξουδετερώνουν" το αρνητικό πρόσημο ενώ οι περιττές το διατηρούνε, λ.χ $(-1)^2=1^2=1$, $(-1)^{2019}=-1^{2017}=-1$, $(-2)^2=2^2=4$, $(-2^3)=-2^3=-8$. Με τη ίδια λογική για την τρίτη παρένθεση ισχύει $(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2=(\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2$. Ένα ακόμη σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι η αντίστροφη χρήση της ιδιότητας δύναμη σε δύναμη. Συνήθως όταν έχουμε δύναμη σε δύναμη πολλαπλασιάζουμε του εκθέτες. Μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο, πολλαπλασιασμένους εκθέτες μπορούμε να τους γράψουμε ως δύναμη σε δύναμη. Αυτό θα κάνουμε για τη δεύτερη παρένθεση ώστε να χρησιμοποιήσουμε τη ιδιότητα των άρτιων δυνάμεων σε σχέση με το πρόσημό, δηλαδή $(-\frac{1}{4})^{2y}=((-\frac{1}{4})^2)^y=((\frac{1}{4})^2)^y=(\frac{1}{4})^{2y}$. Άρα έχουμε:

$$B=(16^{y}\beta^{-2y})(-\frac{1}{4})^{2y}(-\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2 \Rightarrow B=(16^{y}\beta^{-2y})(\frac{1}{4})^{2y}(\frac{\beta^{-1}}{\beta^{-y-1}})^2 \Rightarrow$$
$$B=16^y\beta^{-2y}\frac{1^{2y}}{4^{2y}}\frac{(\beta^{-1})^2}{(\beta^{-y-1})^2} \Rightarrow B=16^y\beta^{-2y}\frac{1}{4^{2y}}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{2(-y-1)}} \Rightarrow B=16^y\beta^{-2y}\frac{1}{4^{2y}}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-2y-2}}$$

Πλέον βλέπουμε ότι για να κάνουμε απλοποιήσεις και πράξεις μεταξύ των εκθετών πρέπει να τα φέρουμε όλα να έχουν την ίδια βάση. Οι δυνάμεις του β έχουν την ίδια βάσεις παρατηρούμε ότι $16 = 4^2$ και η παράσταση γίνεται :

$$B = 16^y\beta^{-2y}\frac{1}{4^{2y}}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-2y-2}} \Rightarrow B = (4^2)^y\beta^{-2y}\frac{1}{4^{2y}}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-2y-2}} \Rightarrow 4^{2y}\beta^{-2y}\frac{1}{4^{2y}}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-2y-2}} \Rightarrow$$
$$B = \beta^{-2y}\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-2y-2}} \Rightarrow B = \beta^{-2y}\beta^{-2-(-2y-2)} \Rightarrow B = \beta^{-2y}\beta^{-2+2y+2} \Rightarrow B = \beta^{-2y}\beta^{2y} \Rightarrow$$
$$B = \beta^{-2y+2y} \Rightarrow B = \beta^0 \Rightarrow B = 1$$

Άσκηση 3: "Θαλής 2002" Αν $a = -\frac{3}{2}$ και β=3 να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = a^3 - (1+a)^{-2} + 4(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2})^2 + [(\frac{\beta}{a} - 2004)^{2004}]^0$$

Λύση:

Κοιτάμε αρχικά την παράσταση που πρέπει να υπολογίσουμε. Βλέπουμε ότι υπάρχει μία ολόκληρη αγκύλη $[\dots]^0$ υψωμένη στο 0. Από τη θεωρία ξέρουμε πως ότι είναι υψωμένο στο 0, όσο πολύπλοκο και αν είναι, κάνει 1. Άρα η παράσταση Κ γίνεται:

$$K = a^3 - (1+a)^{-2} + 4(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2})^2 + 1$$

Παρατηρούμε την παράσταση και συνειδητοποιούμε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων οπότε αναγκαζόμαστε να αντικαταστήσουμε τα α,β με τις τιμές που μας δίνει.

$$K = a^3 - (1+a)^{-2} + 4\cdot(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2})^2 + 1 \Rightarrow K = (-\frac{3}{2})^3 - (1-\frac{3}{2})^{-2} + 4\cdot(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})^2 + 1 \Rightarrow$$
$$K = (-\frac{3}{2})^3 - (\frac{2}{2}-\frac{3}{2})^{-2} + 4\cdot(\frac{4}{2})^2 + 1 \Rightarrow K = (-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^{-2} + 4\cdot(2)^2 + 1 \Rightarrow$$
$$K = (-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^{-2} + 4\cdot(4) + 1 \Rightarrow K = (-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^{-2} + 17$$

Η παράσταση στο σημείο που έχει φτάσει απαιτεί τη χρήση μόνο δύο ιδιοτήτων δυνάμεων. Πρώτον στην πρώτη παρένθεση να σπάσει η δύναμη σε αριθμητή και στη δεύτερη παρένθεση να γίνει η χρήση της ιδιότητας $(\frac{a}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{a})^{\nu}$, λ.χ $(\frac{3}{5})^{-1} = (\frac{5}{3})^1 = \frac{5}{3}$ η' $(\frac{1}{3})^{-2} = (\frac{3}{1})^2 = 3^2 = 9$ η' $4^{-2} = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω η παράσταση Κ γίνεται:

$$K = (-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^{-2} + 17 \Rightarrow K = -\frac{3^3}{2^3} - (-\frac{2}{1})^2 + 17 \Rightarrow K = -\frac{3^3}{2^3} - (-2)^2 + 17 \Rightarrow$$
$$K = -\frac{27}{8} - 4 + 17 \Rightarrow K = -\frac{27}{8} + 13 \Rightarrow K = \frac{-27+104}{8} \Rightarrow K = \frac{77}{8}$$

Άσκηση 4: "Ευκλείδης 2013" α. Αν $x = 3^{-2}$ και $y = 3^{-3}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3})(\frac{x}{y})^3 + \frac{81x^3+27y}{y}$$

β. Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23}5^{89}$ όταν αυτός γραφτεί στην δεκαδική αναπαράσταση του.

Λύση:

α. Παρατηρούμε την παράσταση Α και βλέπουμε ότι έτσι όπως είναι δοσμένη δεν γίνεται κάποια περαιτέρω απλοποίηση οπότε αναγκαστικά θα αντικαταστήσουμε τις τιμές που μας δίνει η άσκηση.

$$A = (\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3})(\frac{x}{y})^3 + \frac{81x^3+27y}{y} \Rightarrow A = \left(\frac{(3^{-2})^3}{(3^{-3})^2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3^{-2}}{3^{-3}}\right)^3 + \frac{81(3^{-2})^3+27(3^{-3})}{3^{-3}}$$

Στην παράσταση που δημιουργήθηκε βλέπουμε ότι έχουμε δύναμη σε δύναμη και διαίρεση δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη οπότε χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ιδιότητες έχουμε

$$A = \left(\frac{(3^{-2})^3}{(3^{-3})^2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3^{-2}}{3^{-3}}\right)^3 + \frac{81(3^{-2})^3 + 27(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow A = \left(\frac{3^{-6}}{3^{-6}} + \frac{1}{3}\right)(3^{-2-(-3)})^3 + \frac{81(3^{-2})^3 + 27(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow$$
$$A = \left(1 + \frac{1}{3}\right)(3^{-2+3})^3 + \frac{81(3^{-2})^3 + 27(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow A = \left(1 + \frac{1}{3}\right)(3)^3 + \frac{81(3^{-2})^3 + 27(3^{-3})}{3^{-3}}$$

Παρατηρούμε τους αριθμούς του τελευταίου κλάσματος και βλέπουμε ότι όλες είναι δυνάμεις του 3, $81 = 3^4$ και $27 = 3^3$. Γενικά αυτό είναι σύνηθες σε ασκήσεις με δυνάμεις, δηλαδή αν βλέπουμε συνέχεια ένα πρώτο αριθμό σαν βάση στην παράσταση τότε οι υπόλοιποι αριθμοί που υπάρχουν στην άσκηση μάλλον θα είναι δυνάμεις αυτού του πρώτου αριθμού. Έχοντας υπόψη μας τα παραπάνω η A γίνεται:

$$A = \left(1 + \frac{1}{3}\right)(3)^3 + \frac{81(3^{-2})^3 + 27(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow A = \left(1 + \frac{1}{3}\right)(3)^3 + \frac{3^4(3^{-2})^3 + 3^3(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow$$
$$A = \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right)(3)^3 + \frac{3^4 3^{-6} + 3^3(3^{-3})}{3^{-3}} \Rightarrow A = \left(\frac{4}{3}\right)(3)^3 + \frac{3^{4+(-6)} + 3^{3+(-3)}}{3^{-3}} \Rightarrow$$
$$A = (4)(3)^2 + (3^{-2} + 3^0) : (3^{-3})$$

Από τον ορισμό της διαίρεση γνωρίζουμε ότι $a : \beta = a \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, οπότε:

$$A = (4)(3)^2 + (3^{-2} + 3^0) : (3^{-3}) \Rightarrow A = (4)(3)^2 + (\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^0) : \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow$$
$$A = (4)(9) + (\left(\frac{1}{9}\right) + 1) \cdot \left(\frac{3}{1}\right)^3 \Rightarrow A = 36 + (\left(\frac{1}{9}\right) + 1) \cdot (27) \Rightarrow$$
$$A = 36 + \frac{27}{9} + 27 \Rightarrow A = 36 + 3 + 27 = 56$$

β. Για να βρούμε από πόσα ψηφία αποτελείται ο αριθμός B πρέπει να τον φέρουμε στην μορφή $a \cdot 10^\nu$, όπου ο α είναι ακέραιος. Τότε το πλήθος των ψηφίων του B είναι το πλήθος των ψηφίων του αριθμού α + ν. Συνήθως σε τέτοιες ασκήσεις προσπαθούμε να γράψουμε τις δυνάμεις των αριθμών σαν δυνάμεις πρώτων, λ.χ $27^{56} = (3^3)^{56} = 3^{168},\ 64^5 = (2^6)^5 = 2^{30},\ 125^{30} = (5^3)^{30} = 5^{90}$. Άρα για τον αριθμό B θα έχουμε:

$$B = 16^{23}5^{89} \Rightarrow B = (2^4)^{23}5^{89} \Rightarrow B = 2^{4*23}5^{89} \Rightarrow B = 2^{92}5^{89}$$

Όταν έχουμε διαφορετικές βάσεις στις δυνάμεις μας αλλά η άσκηση πρέπει να προχωρήσει κι άλλο, συνήθως χρησιμοποιώ αντίστροφα τις ιδιότητες :

1. $\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
2. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

έτσι ώστε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις αλλά με ίδιο εκθέτη και να χρησιμοποιήσουμε μετά τις ιδιότητες:

1. $\alpha^\nu \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu$
1. $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = (\frac{\alpha}{\beta})^\nu$

Έχοντας τα παραπάνω υπόψη μας ο αριθμός B μπορεί να γραφτεί ως:

$$B = 2^{92}5^{89} \Rightarrow B = 2^{89+3}5^{89} \Rightarrow B = 2^{89}2^3 5^{89} \Rightarrow B = 2^3(2 \cdot 5)^{89} \Rightarrow B = 8 \cdot 10^{89}$$

Άρα ο αριθμός B αποτελείται από 89+1=90 Ψηφία.

Άσκηση 5: “Θαλής 2008”

Αν ισχύει $\frac{45^\nu 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιον, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 2015(-1)^{\nu} - (-1)^{\nu+1} + 4(-1)^{\nu+2}$$

Λύση:

Προφανώς το ν θα το βρούμε από τη σχέση $\frac{45^{\nu}2^{2\nu}}{6^{\nu}} = 900$. Παρατηρούμε λίγο την παράσταση και βλέπουμε ότι στους εκθέτες όλων των δυνάμεων υπάρχει το ν, οπότε καταλαβαίνουμε ότι μάλλον οι ιδιότητες των δυνάμεων θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι δυνάμεις να είναι υψωμένες στο ίδιο εκθέτη. Άρα:

$$\frac{45^{\nu}2^{2\nu}}{6^{\nu}} = 900 \Rightarrow \frac{45^{\nu}(2^2)^{\nu}}{6^{\nu}} = 900 \Rightarrow \frac{45^{\nu}4^{\nu}}{6^{\nu}} = 900 \Rightarrow \frac{(45 \cdot 4)^{\nu}}{6^{\nu}} = 900 \Rightarrow$$
$$\frac{(180)^{\nu}}{6^{\nu}} = 900 \Rightarrow \left(\frac{180}{6}\right)^{\nu} = 900 \Rightarrow 30^{\nu} = 900 \Rightarrow \nu = 2$$

Αντικαθιστώντας το ν=2 στην παράσταση Α έχουμε:

$$A = 2015(-1)^{\nu} - (-1)^{\nu+1} + 4(-1)^{\nu+2} \Rightarrow A = 2015(-1)^{2} - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} \Rightarrow$$
$$A = 2015 \cdot 1 - (-1)^{3} + 4(-1)^{4} \Rightarrow A = 2015 \cdot 1 - (-1) + 4 \cdot 1 \Rightarrow A = 2015 + 1 + 4 \Rightarrow A = 2020$$

Άσκηση 6:

Αν ν φυσικός αριθμός να δείξετε ότι ο αριθμό $5^{\nu} - 2 \cdot 5^{\nu+1} + 5^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 16.

Λύση:

Για να είναι ένας αριθμός "α" πολλαπλάσιο ενός αριθμού β πρέπει α=λβ. Για να κάνουμε πράξεις με τις δυνάμεις πρέπει να σπάσουν ο εκθέτες, άρα:

$$A = 5^{\nu} - 2 \cdot 5^{\nu+1} + 5^{\nu+2} \Rightarrow A = 5^{\nu} - 2 \cdot 5^{\nu} \cdot 5^{1} + 5^{\nu} \cdot 5^{2} \Rightarrow A = 5^{\nu} - 10 \cdot 5^{\nu} + 25 \cdot 5^{\nu} \Rightarrow$$
$$A = 5^{\nu}(1 - 10 + 25) \Rightarrow A = 5^{\nu} \cdot 16 \Rightarrow A = 16 \cdot 5^{\nu}$$

Μαθηματικός-Φυσικός:

Προκόπου-Χουλιάρα-Μαρία-Ιωάννα