Μαρής Θωμάς
Μαθηματικός

Διαγώνισμα Προσομοιώσεις (1) 2020
Μαθηματικά προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικης

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_o του πεδίου ορισμού τους, τότε και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(f+g\right)'\left(x_o\right)=f'\left(x_o\right)+g'\left(x_o\right)$$

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 2

Α3. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α. Πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
β. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο διάστημα [α,β];
γ. Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$;

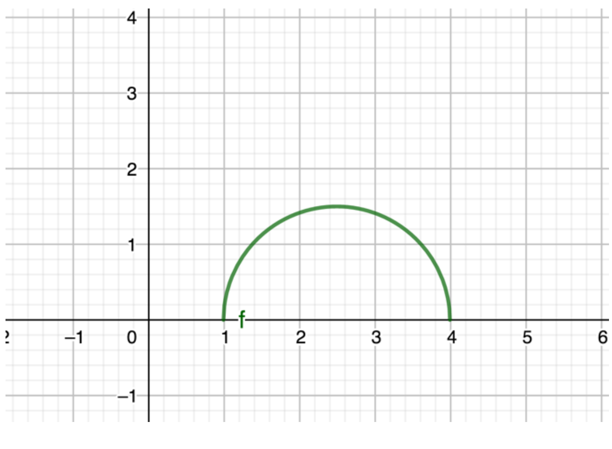
Μονάδες 3

Α4. Δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

α. «Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε κατ' ανάγκη $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.»
β. «Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o}\left|f\left(x\right)\right|=1$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to x_o}f\left(x\right)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}f\left(x\right)=-1$».
γ. «Αν μια συνάρτηση f συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $x_o\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$, τότε κατ' ανάγκη f(α)=f(β).»

Μονάδες [(1+2)x3=9]

Α5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

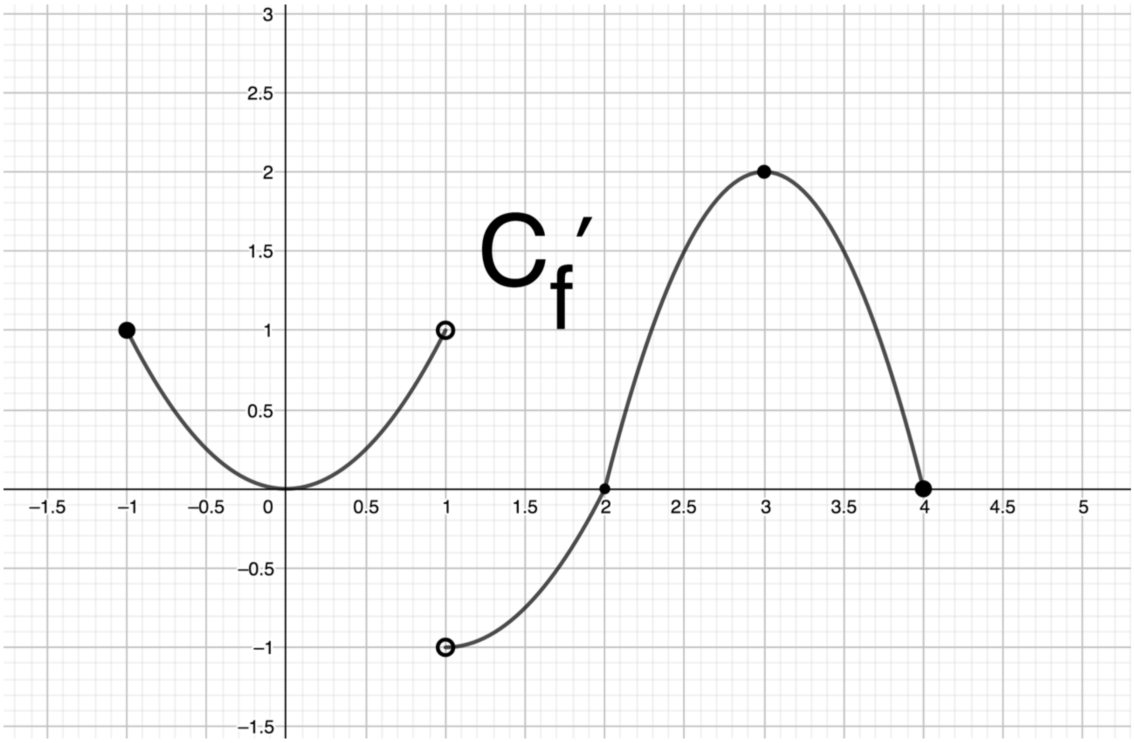


α. Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το (1,4).
β. Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το [1,4].
γ. $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(1,4\right)$.
δ. Υπάρχει $x_o\in\left(1,4\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' (**της παραγώγου**) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνονται επιπλέον ότι:

- f(-1)=-3
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο A(1,0)
- f(2)=-5
- Η εφαπτομένη της C_f στο B(4, f(4)) είναι η y=-1.

B1. Να δείξετε ότι f(1)=0 και f(4)=-1 αιτιολογώντας την απάντηση σας.

Μονάδες 3

B2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

Μονάδες 3

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης f(x)=0.

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f'(x)}$ αιτιολογώντας την απάντηση σας.

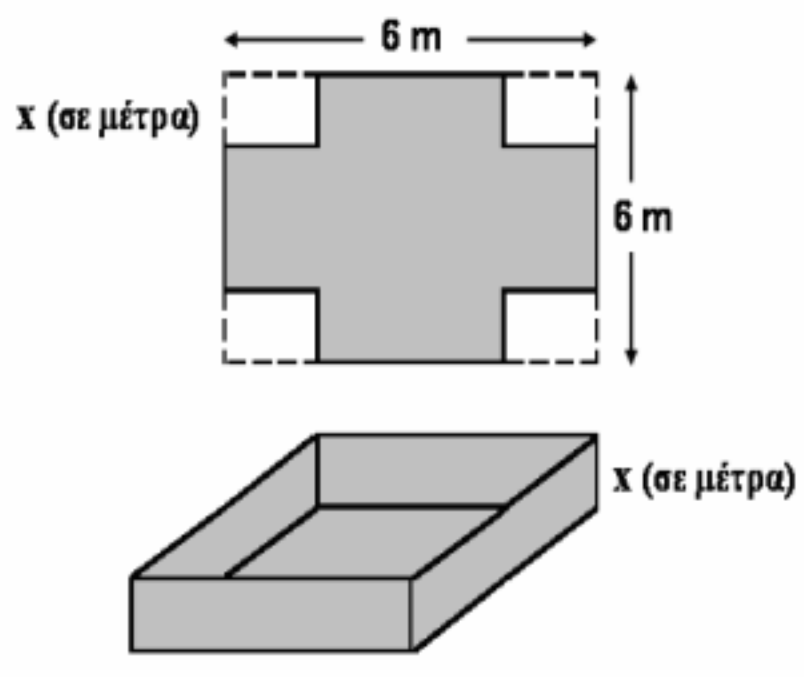
Μονάδες 4

B6. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f'\left(\dfrac{16}{5}\right)$ και $f'\left(\dfrac{17}{5}\right)$.

Μονάδες 3

Θέμα Γ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζουμε μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x) = 4x(3-x)^2,\ 0<x<3.$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ)

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)-8}{x}$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Μονάδες 6

β. Να δείξετε ότι $\dfrac{g(2019)}{g(2020)} < \left(\dfrac{3-g(2020)}{3-g(2019)}\right)^2$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$.
- $f'(0) < f(1) - f(0)$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_o=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα [0,1] και η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$**.**

Δ3. Αν για τη συνάρτηση g(x) ισχύει $g(x)\geq 2x+f(2)-6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(0,2)$ ώστε $f'(x_o)=2$.

Μονάδες 6

β. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ ώστε $\frac{1}{f''(x_1)}+\frac{1}{f''(x_2)}=2$.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\cdot g(x)}$.

Μονάδες 6

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Δυνατή αποχώρηση σε 60 λεπτά.