77 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Μαθηματικά Γ' Λυκείου Προσανατολισμού

Askisopolis.gr

Σ. Μιχαήλογλου – Δ. Πατσιμάς – Ν. Τούντας

2025 - 2026

Πρόλογος

Το φυλλάδιο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, οι οποίοι θα εξεταστούν στα Μαθηματικά στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Περιλαμβάνει 77 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής σε όλη την έκταση της ύλης της Γ΄ Λυκείου. Περιέχονται και όλες οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής του σχολικού βιβλίου, στις οποίες αναγράφεται αντίστοιχη ένδειξη. Στο τέλος υπάρχουν οι απαντήσεις των ερωτήσεων με σύντομες αιτιολογήσεις. Ελπίζουμε το φυλλάδιο αυτό να φανεί χρήσιμο στους μαθητές στην προετοιμασία τους για τις εξετάσεις.

Οι συγγραφείς

Η εικόνα του εξωφύλλου είναι από τον ιστότοπο www.peirklhs.com

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1ο Κεφάλαιο

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2)-x$. Από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε όποια ή όποιες είναι ίσες με την f:

Α) $A(x)=2\ln x-x$ **Β)** $B(x)=2\ln|x|-x$ **Γ)** $\Gamma(x)=\ln(x^2e^{-x})$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Από τους παρακάτω ισχυρισμούς, επιλέξτε τον λανθασμένο ή τους λανθασμένους:

Α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Β) Η f είναι ίση με την $g(x)=\sqrt{x^3}$.

Γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ) Υπάρχει διάστημα στο οποίο ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση f.

3. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^2$. Από τους παρακάτω ισχυρισμούς, επιλέξτε τον σωστό ή τους σωστούς:

Α) Η $g\circ f$ είναι ίση με την $h(x)=x$.

Β) Οι συναρτήσεις f^4 και g είναι ίσες σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Γ) Είναι $f\circ g=g\circ f$.

Δ) Η αντίστροφη της f είναι η g.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$. Από τους παρακάτω ισχυρισμούς, επιλέξτε τον σωστό ή τους σωστούς:

Α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Β) Η f είναι ίση με την $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

Γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Ε) Είναι $f^2(x)=\dfrac{1}{x}$ άρα το $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)$ δεν υπάρχει.

5. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.
Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, $\ell,m\in\mathbb{R}$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι: **Α)** $l<m$ **Β)** $l\le m$ **Γ)** $l\ge m$ **Δ)** $l=m$ **Ε)** $m<l$

(Σχολικό Βιβλίο)

6. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$. Το όριο $\lim\limits_{x\to \lambda-1} f(x)$ είναι καλώς ορισμένο αν και μόνον αν:

Α) $\lambda\in\mathbb{R}$ **Β)** $\lambda\in[0,1)$ **Γ)** $\lambda\in[1,2]$ **Δ)** $\lambda\in[1,2)$

7. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι :

Α) $+\infty$ **Β)** Δεν υπάρχει **Γ)** 0 **Δ)** 1

8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ τότε από τους παρακάτω ισχυρισμούς, επιλέξτε τον λανθασμένο ή τους λανθασμένους: **Α)** $x_0=0$ **Β)** $x_0=2\pi$ **Γ)** $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ **Δ)** $x_0=\pi$

9. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 **Β)** 1 **Γ)** 0 **Δ)** $+\infty$ **Ε)** -8

(Σχολικό Βιβλίο)

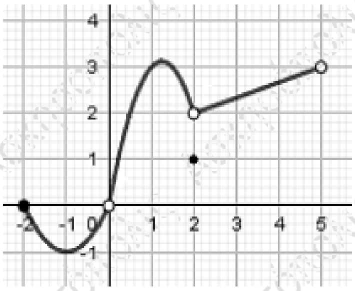
10. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-x^{10}-x+1)^{202}-x+1}{(x^{1010}-x^3+x)^2-2}$ είναι ίσο με:

Α) -1 **Β)** $+\infty$ **Γ)** 0 **Δ)** $-\infty$ **Ε)** 1

11. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}$ είναι:

Α) απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$ και δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε. **Β)** ίσο με 0.

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Από τους παρακάτω ισχυρισμούς να επιλέξετε τους σωστούς.



Α) Το $[-1,2)\cup(2,3]$ είναι το σύνολο τιμών της f.
Β) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Γ) Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.
Δ) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$
Ε) Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$.
Στ) Ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f στο $[-1,1]$.

13. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ με την f να μην είναι η μηδενική συνάρτηση και να υπάρχει διάστημα στο οποίο είναι θετική. Να επιλέξετε όποια ή όποιες απαντήσεις είναι κατ' ανάγκη σωστές.
Α) Η f^2 είναι συνεχής στο Δ.
Β) Η $\dfrac{1}{f}$ είναι συνεχής στο Δ.
Γ) Η $\sqrt{f}$ είναι συνεχής σε υποσύνολο του Δ.
Δ) Η $|f|+f$ είναι συνεχής στο Δ και υπάρχει υποσύνολο του Δ στο οποίο να είναι ίση με την $2f$.

14. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ **Β)** $-\infty$ **Γ)** 1 **Δ)** -1 **Ε)** 0

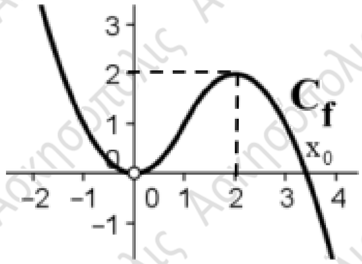
(Σχολικό Βιβλίο)

15. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α) $x_0=0$ **Β)** $x_0=2$ **Γ)** $x_0=-1$ **Δ)** $x_0=1$

(Σχολικό Βιβλίο)

16. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτηση f. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω.



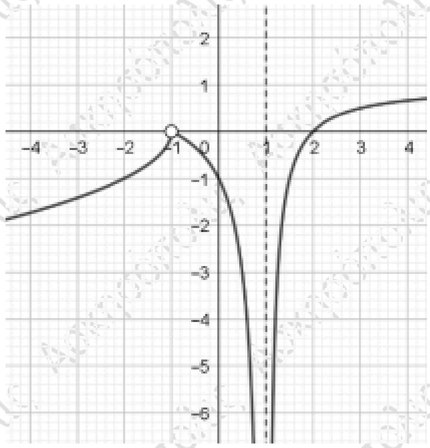
A) Η f είναι συνεχής.

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

Γ) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$.

Δ) Ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[2,x_0]$ για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x$.

17. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτηση f. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:



A) Η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2\}$.

B) Το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ δεν είναι καλώς ορισμένο

Γ) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$.

Δ) Η συνάρτηση $\sqrt{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $[2,+\infty)$.

E) $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$.

18. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες;

A) $f(x)=x^{2023}+\ln x$ **B)** $g(x)=-\dfrac{1}{x}$ **Γ)** $h(x)=\sqrt{|x|}$

Δ) $\varphi(x)=\eta\mu x\ ,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ **E)** $k(x)=\varepsilon\varphi x$ **στ)** $z(x)=-\ln(-x^3)$

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

A) η g είναι συνεχής στο 2.
B) η f είναι συνεχής στο 1.
Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.
Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ***(Σχολικό Βιβλίο)***

20. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

A) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: « $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν ………………………………»

B) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν ……………………

Γ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν ……………………..

Δ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=0$

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(\ldots\ldots\ldots)=\ell$

ΣΤ) $\lim\limits_{x\to x_0} x=\ldots\ldots$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c=\ldots\ldots$

21. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

Αν ………….. τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

Α) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ για κάθε σταθερά $k\in\mathbb{R}$.

Γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, εφόσον ………………..

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\ldots\ldots\ldots\ldots$

ΣΤ) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ εφόσον ……… κοντά στο x_0.

Ζ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

22. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ **Β)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$ **Γ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Δ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ **Ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^3+x+1\right)\right]$ **ΣΤ)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^3+x-1\right)\right]$

(Σχολικό Βιβλίο)

23. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

Α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = +\infty$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\infty$

Γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε ……… κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε …….. κοντά στο x_0

Δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(\ldots\ldots\ldots)=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ldots\ldots\ldots$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$.

Ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\ldots\ldots\ldots=0$

ΣΤ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και ……… κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\ldots..$

Ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ldots\ldots$

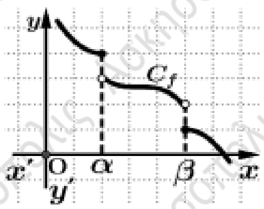
Η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\ldots\ldots..$

Θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=\ldots.,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

Ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=\ldots.,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

Κ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=\ldots.,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

24. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις.



Α) Η f είναι συνεχής στο (α,β).

Β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Γ) Υπάρχει υποσύνολο του (α,β) στο οποίο εφαρμόζεται το Θ.Ε.Τ.

25. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

Α) Αν ……. , τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=\ldots.$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=\ldots.$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=\ldots.$

Β) Αν $0<\alpha<1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=\ldots.$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=\ldots.$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=\ldots.$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=\ldots.$

Γ) $\lim\limits_{x\to x_0}(\eta\mu x)=\ldots.$

Δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\ldots.$

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0}(\sigma\upsilon\nu x)=\ldots.$

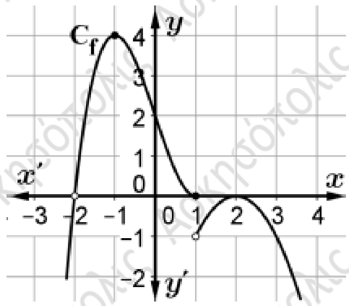
ΣΤ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\ldots.$

26. Να συμπληρώσετε τα κενά στην επόμενη πρόταση:

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_k x^k+\beta_{k-1}x^{k-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}$ με $\alpha_\nu\neq 0,\ \beta_k\neq 0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ldots\ldots\ldots=\begin{cases}0, & \text{αν } \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots, & \text{αν } \nu=k\\ +\infty \text{ ή } -\infty & \text{αν } \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

27. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να επιλέξετε τις λανθασμένες προτάσεις από τις παρακάτω:



Α) Η f είναι συνεχής στο 1.

Β) Ισχύει το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $g(x) = f(x) + 5x$ στο $[-1,0]$.

Γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Δ) Η εξίσωση $f(x) = \lambda$ με $\lambda \in (-1,0]$ έχει 3 ρίζες.

28. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0,3]$, με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$.

Γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

(Σχολικό Βιβλίο)

29. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση: Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$, τότε

Α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

Β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

Γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

Δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α,β).

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2017)

30. Να συμπληρώσετε τα κενά στον επόμενο πίνακα:
(Αν σε κάποιο όριο έχουμε απροσδιοριστία να βάλετε ερωτηματικό)

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(f\cdot g)$	$\lim\frac{f}{g}$
$\kappa\in\mathbb{R}$	$\lambda\in\mathbb{R}$			
	$+\infty$		$+\infty$	0
$\kappa<0$	$+\infty$			
$\kappa>0$		$-\infty$		
	$-\infty$		$+\infty$	0
	$\lambda>0$	$+\infty$		
$+\infty$	$\lambda<0$			
	$\lambda>0$			$-\infty$
	$\lambda<0$	$-\infty$		
0		0		
0		$\pm\infty$		

$\pm\infty$	0			
$+\infty$	$+\infty$			
$-\infty$	$-\infty$			
$+\infty$	$-\infty$			
$-\infty$	$+\infty$			

2ο Κεφάλαιο

31. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^x$, $x>0$. Η $f'(x)$ ισούται με: **Α)** $x\cdot x^{x-1}$ **Β)** $e^{x\ln x}$ **Γ)** $e^{\ln x+1}$ **Δ)** $f(x)(\ln x+1)$

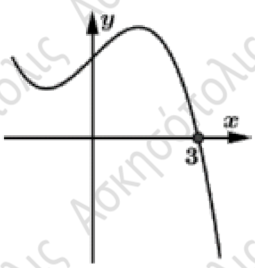
32. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σύνολο Α. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:
Α) Η f έχει πεδίο ορισμού το Α.
Β) Η f' είναι συνεχής στο Α.
Γ) Η f είναι συνεχής στο Α.
Δ) Η C_f δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο $x_0\in A$.

33. Να επιλέξετε όποια απάντηση είναι σωστή (μπορεί να είναι και οι δύο σωστές).
Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:
Α) Το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
Β) Το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . ***(Σχολικό Βιβλίο)***

34. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(1)f'(2)<0$ και $f'(0)=0$. Να επιλέξετε τις λάθος προτάσεις από τις παρακάτω:
Α) Ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f' στο $[1,2]$.
Β) Η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Γ) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.
Δ) Ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]$.

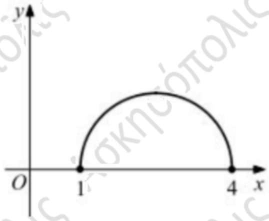
35. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (επιλέξτε την σωστή απάντηση): **Α)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **Β)** $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$
(Σχολικό Βιβλίο)

36. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f.



Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:
Α) Μπορεί να ισχύει ότι $f(0)=f(3)$.
Β) Ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f' σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<3<\beta$.
Γ) Η C_f έχει δύο σημεία καμπής.
Δ) Η f δεν έχει κρίσιμα σημεία.
Ε) Αν η f' παραγωγίσιμη τότε υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=-\dfrac{f'(x)}{3-x}$ για κάθε $x<3$.

37. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε να επιλέξετε από τις παρακάτω προτάσεις τις σωστές απαντήσεις:



Α) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$.

Β) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$.

Γ) $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$.

Δ) Υπάρχει $x_0\in(1,4): f'(x_0)=0$.

(Σχολικό Βιβλίο)

38. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^5(\ln x)$, $x>0$. Η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $5\sigma\upsilon\nu^4(\ln x)$ **Β)** $\frac{5\eta\mu^4(\ln x)\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}$

Γ) $5\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{1}{x}\right)$ **Δ)** $\sigma\upsilon\nu^5(\ln x)$

39. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

Α) μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Β) μια ακριβώς ρίζα στο $(-1,0)$.

Γ) τρεις πραγματικές ρίζες.

(Σχολικό Βιβλίο)

40. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}$ ισούται με:

Α) $\lim\limits_{h\to0}\left[\alpha f'(x_0+\alpha h)\right]$. **Β)** $f'(x_0)$ **Γ)** $\frac{f'(x_0)}{\alpha}$ **Δ)** $\alpha f'(x_0)$

41. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το $\lim\limits_{h\to0}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Β)** $\frac{4}{3}$ **Γ)** $\sqrt{3}$ **Δ)** 0 **Ε)** $\frac{3}{4}$

(Σχολικό Βιβλίο)

42. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x^7+1)^{10}(x^3-1)$. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:

Α) Υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Β) Η παράγωγος της f είναι πολυώνυμο βαθμού 72.

Γ) $f'(x)=10(x^7+1)^9\cdot3x^2$.

Δ) Η C_f δέχεται ασύμπτωτες.

43. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4-1}{x+1}$. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:

Α) Η C_f δέχεται πλάγιες ασύμπτωτες.

Β) Ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1,1]$.

Γ) Η C_f δέχεται ασύμπτωτες.

Δ) Αν $g(x)=(x-1)(x^2+1)$ τότε $f=g$.

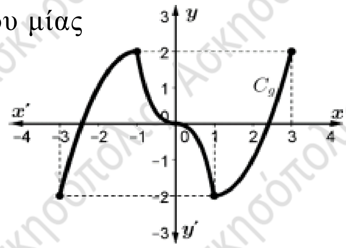
Ε) Έστω συνεχής συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(0)=2$ και $h(1)\le 0$. Η εξίσωση $f(x)+h(x)=0$ έχει λύση στο $(0,1]$.

44. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{1}{x^2}$ **Β)** $-\dfrac{2}{x^2}$ **Γ)** $-\dfrac{1}{x^2}$ **Δ)** $-\dfrac{2}{x}$ **Ε)** 0

(Σχολικό Βιβλίο)

45. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$.



Να επιλέξετε τις λάθος προτάσεις.

Α) Η C_f έχει δύο σημεία καμπής.

Β) Η f έχει 3 τοπικά ακρότατα.

Γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 4 ρίζες.

Δ) Η γραφική παράσταση της $g(x)=f'(x)$, $x\in[0,1]$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

46. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3x5^{3x-1}$ **Β)** $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ **Γ)** $3\cdot 5^{2x}$ **Δ)** $3\cdot 5^{3x}$ **Ε)** $5^{3x}\ln 125$

(Σχολικό Βιβλίο)

47. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)f(2)>0$ και $f(0)f(1)<0$. Να επιλέξετε καθένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς ο οποίος είναι σωστός:

Α) Η C_f τέμνει τον x΄x άξονα σε τουλάχιστον 2 σημεία.

Β) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

Γ) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$.

Δ) Υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f'.

48. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α) $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\,\eta\mu(\pi+1)$, **Β)** $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$, **Γ)** $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\,\eta\mu(\pi+1)$, **Δ)** $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

(Σχολικό Βιβλίο)

49. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f(t)=x^t+t^x+x^2+t\ln x$, $t>0$, $x>0$ τότε η $f'(t)$ ισούται: **Α)** $tx^{t-1}+t^x\ln t+2x+\dfrac{t}{x}$ **Β)** $x^t\ln x+xt^{x-1}+\ln x$

50. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με: **Α)** 1 **Β)** -1 **Γ)** 0 **Δ)** 27 **Ε)** δεν υπάρχει.

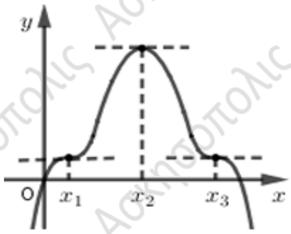
(Σχολικό Βιβλίο)

51. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

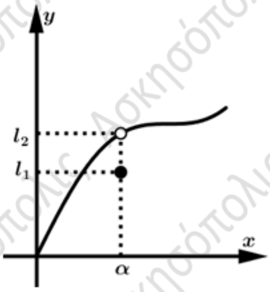
Α) 0 **Β)** $\dfrac{1}{4}$ **Γ)** $\dfrac{1}{2}$ **Δ)** 1 **Ε)** 2

(Σχολικό Βιβλίο)

52. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f.
Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις.
Α) Η f παρουσιάζει καμπή στο x_2.
Β) Η f' παρουσιάζει καμπή στα x_1 και x_3.
Γ) Η εξίσωση $f(x)=0$, μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες.
Δ) Αν $f(0)=0$, τότε στο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}$ μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του De L' Hospital.



53. Να επιλέξετε την λάθος απάντηση. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Η διπλανή γραφική παράσταση:
Α) δεν μπορεί να παριστάνει την f.
Β) μπορεί να παριστάνει την f'.

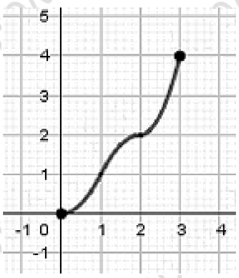


54. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:
Α) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ **Β)** $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ **Γ)** $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ **Δ)** $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ **Ε)** $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.
(Σχολικό Βιβλίο)

55. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με ίσες παραγώγους. Από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε όσες είναι σωστές.
Α) Οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.
Β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της g κατά $c>0$ μονάδες πάνω ή κάτω.
Γ) Θα είναι $f(x)-g(x)=c$.
Δ) Οι γραφικές παραστάσεις δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο τους.
Ε) Οι εφαπτομένες των γραφικών τους παραστάσεων στο $x_0\in\mathbb{R}$ είναι παράλληλες μεταξύ τους ή ταυτίζονται.

56. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:
Α) $f(1)=-1$ **Β)** $f(-1)>0$ **Γ)** $f(1)>0$ **Δ)** $f(-1)=0$
(Σχολικό Βιβλίο)

57. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας 1-1 και παραγωγίσιμης συνάρτησης f.
Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, με $(f^{-1})'(4)=4(f^{-1})'(0)$ τότε ο λόγος $\frac{f'(0)}{f'(3)}$ ισούται με: **Α)** 0 **Β)** 4 **Γ)** Δεν ορίζεται



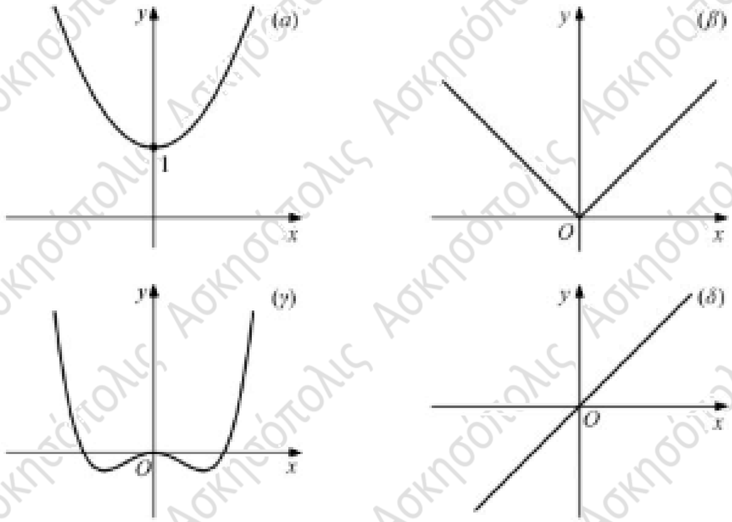
58. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο.

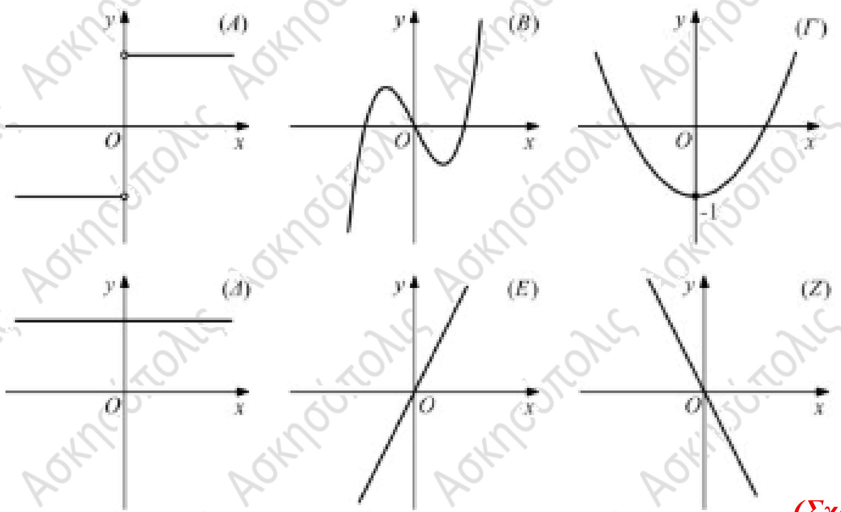
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$	Α. $y=2$
2. $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}$	Β. $y=x-1$

3. $f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$	Γ. $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

(Σχολικό Βιβλίο)

59. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





(Σχολικό βιβλίο)

3ο Κεφάλαιο

60. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f'(x)=6\eta\mu^2(2x)\sigma\upsilon\nu(2x)$ και $f(0)=1$, τότε το $f(\pi)$ ισούται με: **Α)** 1 **Β)** 0 **Γ)** 2 **Δ)** $\dfrac{\pi}{2}$

61. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f'(x)=\eta\mu\pi x$ και $f(0)=0$, τότε το $f(1)$ ισούται με: **Α)** $-\dfrac{1}{\pi}$ **Β)** $\dfrac{1}{\pi}$ **Γ)** $-\dfrac{2}{\pi}$ **Δ)** $\dfrac{2}{\pi}$

(Σχολικό βιβλίο)

62. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$ είναι η:

Α) $\ln(4-x)$ **Β)** $-\ln(4-x)$ **Γ)** $-\ln|4-x|$ **Δ)** $\ln|4-x|$

63. Να επιλέξετε όσες απαντήσεις είναι σωστές. Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x>1$ είναι η: **Α)** $-\ln(x-1)+2$ **Β)** $-\ln(1-x)+2$ **Γ)** $-\ln(x-1)+1$ **Δ)** $\ln(x-1)$ **Ε)** $-\ln(1-x)$ **ΣΤ)** $\ln(1-x)$

64. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Η $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$, $x>0$ έχει αρχική την:

Α) $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$ **Β)** $2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ **Γ)** $\dfrac{(1-\ln x)^3}{3}+c$

Δ) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}-2x+c$ **Ε)** $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)+c$.

65. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με:

Α) $\dfrac{4}{3}$ **Β)** 0 **Γ)** $-\dfrac{4}{3}$ **Δ)** $\dfrac{2}{3}$ **Ε)** $\dfrac{5}{3}$

(Σχολικό βιβλίο)

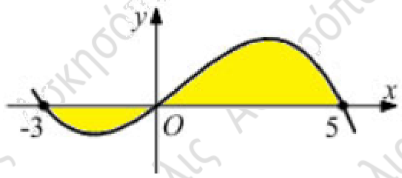
66. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{3}\ln x\,dx$ είναι ίσο με:

Α) $3\ln 3-1$ **Β)** $3\ln 3-2$ **Γ)** $-\dfrac{2}{3}$ **Δ)** Δεν ορίζεται

67. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με:

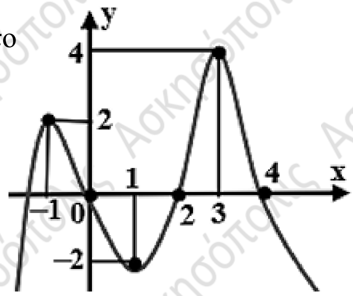
Α) $\int_{-3}^{5}f(x)dx$ **Β)** $\int_{5}^{-3}f(x)dx$

Γ) $\int_{-3}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{5}f(x)dx$ **Δ)** $\int_{0}^{-3}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$



(Σχολικό βιβλίο)

68. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης G, η οποία είναι παράγουσα της f.



Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις από τις παρακάτω:

Α) $\int_{-1}^{2}\left(\int_{2}^{3}f(t)dt\right)dx=12$.

Β) $\int_{0}^{4}G(x)dx=-\int_{0}^{2}G(x)dx+\int_{2}^{4}G(x)dx$.

Γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ρίζες.

Δ) Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f, άξονα x΄x και των ευθειών $x=-1$ και $x=3$ ισούται με 2 τ.μ.

69. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=g(0)+2$, τότε για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x)=g(x)-2$ **Β)** $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx=4$

Γ) $f(x) \le g(x)$, $x \in [-1,1]$ **Δ)** Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$.

(Σχολικό βιβλίο)

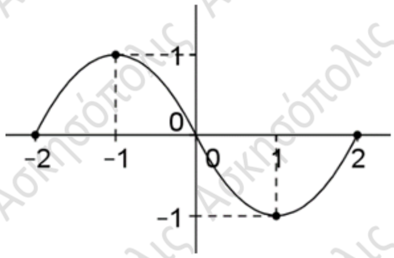
70. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ συνάρτησης f με $f(1)=f(-1)$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f', η οποία είναι περιττή. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση στα παρακάτω.

Α) Η f είναι:
i) Άρτια **ii)** Περιττή **iii)** Τίποτα από τα δύο

Β) Η f'' είναι:
i) Άρτια **ii)** Περιττή **iii)** Τίποτα από τα δύο

Γ) Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} x f''(x)dx$ ισούται με:

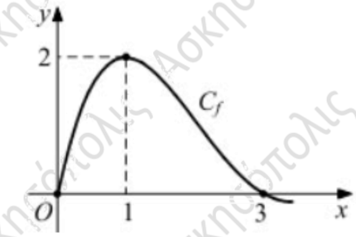
i) 2 **ii)** 0 **iii)** $\left[\frac{x^2}{2} f''(x)\right]_{-1}^{1}$



71. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με: **Α)** 0 **Β)** 1 **Γ)** 2 **Δ)** $\frac{1}{2}$

(Σχολικό βιβλίο)

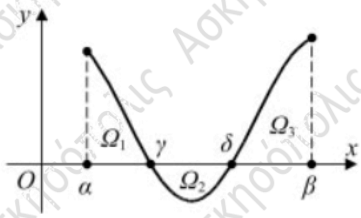


72. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $\int_{\alpha}^{\alpha+1} x dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} dx$, τότε ο πραγματικός αριθμός α είναι ίσος με: **Α)** $-\frac{1}{2}$ **Β)** $\frac{1}{2}$ **Γ)** 0 **Δ)** 2

73. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με:

Α) 6 **Β)** –4 **Γ)** 4 **Δ)** 0 **Ε)** 2

(Σχολικό βιβλίο)



74. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Αν $\int_1^{\alpha^2+1} dx \le 1-2\alpha$, τότε ο πραγματικός αριθμός α:

Α) Δεν υπάρχει **Β)** ισούται με -1

75. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ **Β)** $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$ **Γ)** $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$ **Ε)** $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ **Ζ)** $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

(Σχολικό βιβλίο)

76. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Για να είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα $\int_{1-\alpha^2}^{2\alpha}\left(\sqrt{1-x}+\ln x\right)dx$ πρέπει: **Α)** $\alpha \le 1$ **Β)** $0<\alpha \le 1$ **Γ)** $\alpha > 0$ **Δ)** $0<\alpha \le \frac{1}{2}$

77. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το $[2]_{\alpha}^{\beta}$ ισούται με:

Α) 0 **Β)** $2\beta-2\alpha$ **Γ)** Δεν ορίζεται

Ερωτήσεις Κατανόησης

1ο Κεφάλαιο

1. **Απαντήσεις: Β) και Γ) .** $D_f = D_B = D_\Gamma = \mathbb{R}^*$ ενώ $D_A = (0,+\infty)$. Είναι $f(x) = \ln(x^2) - x = 2\ln|x| - x = B(x)$ και $f(x) = \ln(x^2) - x = = \ln(x^2) - \ln e^x = \ln\frac{x^2}{e^x} = \ln(x^2e^{-x}) = \Gamma(x)$.

2. **Απάντηση: Δ) .** $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα δεν υπάρχουν $\alpha,\beta \geq 0$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και δεν ισχύει το Θεώρημα Bolzano. Οι υπόλοιπες απαντήσεις είναι όλες σωστές.

3. **Απάντηση: Β) .** Είναι $D_{g\circ f} = [0,+\infty)$, $D_h = \mathbb{R}$ άρα όχι $g \circ f = h$. Είναι $f^4(x) = x^2$, $x \geq 0$ δηλαδή $f^4 = g$ στο $[0,+\infty)$ άρα σωστή η Β). Είναι $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ άρα όχι $f \circ g = g \circ f$. Επίσης η g δεν είναι 1-1 άρα δεν μπορεί να είναι η f^{-1}.

4. **Απαντήσεις: Β) .** Είναι $D_f = (0,+\infty)$ άρα το Α) λάθος. Είναι $D_g = (0,+\infty) = D_f$ και $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} = g(x)$ για κάθε $x > 0$ άρα το Β) σωστό.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Είναι $f^2(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ και υπάρχει.

5. **Απάντηση: Β) .** Ισχύει $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

6. **Απάντηση: Γ) .** Πρέπει το $\lambda - 1$ να είναι σημείο του πεδίου ορισμού ή άκρο αυτού δηλαδή $0 \leq \lambda - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \lambda \leq 2$.

7. **Απάντηση Γ) .** Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

8. **Απαντήσεις Γ) και Δ) .** Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = -\frac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = -\frac{2}{\pi}$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ (γνωστό όριο) και $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{0}{2\pi} = 0$.

9. **Απάντηση: Ε) .** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8\cancel{x^6}}{\cancel{x^6}} = -8$

10. **Απάντηση: Ε) .** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-x^{10}-x+1)^{202} - x + 1}{(x^{1010}-x^3+x)^2 - 2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{2020}}}{\cancel{x^{2020}}} = 1$

11. **Απάντηση: Β) .** Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

12. **Απαντήσεις: Δ) και Ε) .** Η f έχει σύνολο τιμών το $\left[-1,3\right]$ και δεν είναι συνεχής στο 2 άρα λάθος οι Α) , Β) . Το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια στο σημείο αυτό, λάθος και η Γ). Η f δεν είναι συνεχής στο $\left[-1,1\right]$ καθώς διακόπτεται στο μηδέν άρα δεν ισχύει το Θεώρημα Bolzano και είναι λάθος και το Στ).

13. **Απαντήσεις: Α) , Γ) και Δ) .** Η f^2 συνεχής στο Δ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων άρα σωστή η Α). Η $\frac{1}{f}$ δεν ορίζεται κατ' ανάγκη σε όλο το Δ άρα δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο Δ και λάθος η Β). Η $\sqrt{f}$ ορίζεται σε υποσύνολο του Δ (από εκφώνηση) και είναι συνεχής άρα σωστή η Γ). Η $|f|+f$ είναι συνεχής στο Δ ώς άθροισμα συνεχών και αφού υπάρχει διάστημα που f θετική θα είναι σε αυτό $|f|+f=f+f=2f$ άρα σωστή η Δ).

14. **Απάντηση: Ε) .** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2-1\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$.

15. **Απάντηση: Δ) .** Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-2}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2}{x-1}=2$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-1}=0$,

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-2}{x-1}=+\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x-1}=-\infty$.

16. **Απαντήσεις: Α) και Δ) .** Η f συνεχής άρα σωστή η Α). Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0$ και $f\left(x\right)>0$ κοντά στο 0

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$, δηλαδή λάθος η Β). Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=0$ όμως λόγω προσήμου είναι

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f\left(x\right)}=-\infty$, δηλαδή λάθος η Γ). Η g συνεχής στο $\left[2,x_0\right]$,

$g\left(2\right)=f\left(2\right)-\ln 2=2-\ln 2=\ln e^2-\ln 2>0$, $g\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)-\ln x_0=-\ln x_0<0$ γιατί

$x_0>1\Leftrightarrow \ln x_0>0$, δηλαδή σωστή η Δ).

17. **Απαντήσεις: Γ), Δ) και Ε) .** Η $\frac{1}{f}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}-\left\{-1,1,2\right\}$ άρα λάθος η Α). Είναι $\lim\limits_{x\to -1}f\left(x\right)=0$ άρα λάθος η Β).

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{f\left(x\right)}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$ άρα σωστή η Γ).

18. **Απαντήσεις: Α), Δ) και Στ) .**

19. **Απάντηση: Γ) .** Την συνέχεια την εξετάζουμε μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού. Τα υπόλοιπα προφανώς είναι σωστά.

20. **Α)** ….. « $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\ell$ αν και μόνο αν $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\ell}$ »

Β) ….. τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\ell$ αν και μόνο αν $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\ell}$.

Γ) ….. τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\ell$ αν και μόνο αν $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\ell}$.

Δ) $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\ell\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-\ell\right)=0$

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\ell\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}f\left(x_0+h\right)=\ell$

ΣΤ) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$

21. Αν **υπάρχουν** τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

Α) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right)=\mathbf{k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ για κάθε σταθερά $k\in\mathbb{R}$.

Γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}{\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}}$, εφόσον $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0}$.

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\right|$

ΣΤ) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}$ εφόσον $\mathbf{f(x)\geq 0}$ κοντά στο x_0.

Ζ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=\left[\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\right]^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

22. Απαντήσεις: Α) , Γ) και Ε) . Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{20}-x+1\right)=1>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^9+x-1\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+x+1\right)=1>0$ άρα τα αντίστοιχα όρια Α) , Γ) και Ε) είναι καλώς ορισμένα. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{20}-x-1\right)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^9+x-1\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+x-1\right)=-1<0$ άρα δεν είναι καλώς ορισμένα τα Β) , Δ) και Στ) .

23. Α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$

Β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

Γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$.

Ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

ΣΤ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

Η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$

Θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Κ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

24. Απαντήσεις: Α) και Γ) .

25. Α) Αν $\alpha > 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$

Β) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$

Γ) $\lim\limits_{x\to x_0} (\eta\mu x) = \eta\mu x_0$

Δ) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

Ε) $\lim\limits_{x\to x_0} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$

ΣΤ) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

26. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_k x^k} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \quad \nu < k \\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_k}, & \alpha\nu \quad \nu = k \\ +\infty \text{ ή } -\infty, & \alpha\nu \quad \nu > k \end{cases}$$

27. Απαντήσεις: Α) και Δ) . Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -1$ άρα όχι συνεχής στο 1. Η g συνεχής στο $[-1,0]$, $g(-1) = f(-1) - 5 = -1 < 0$, $g(0) = f(0) = 2 > 0$ άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 2 άρα $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$. Για $\lambda = 0$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 ρίζες και όχι 3.

28. Απάντηση: Ε) . Για το Α) ισχύει το θεώρημα Bolzano. Για τα Β) και Γ) η f συνεχής άρα ισχύουν. Για το Δ) η f συνεχής και παίρνει τις τιμές -1 και 2 άρα λόγω του ΘΕΤ θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές, δηλαδή το $[-1,2]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών. Το Ε) δεν ισχύει αναγκαστικά καθώς μπορεί να παρουσιάζει άλλα ακρότατα στο εσωτερικό. Θα ίσχυε αν η f ήταν γνησίως αύξουσα.

29. Απάντηση: Δ) .

30.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(f\cdot g)$	$\lim \dfrac{f}{g}$
$\kappa \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\kappa + \lambda$	$\kappa \cdot \lambda$	$\dfrac{\kappa}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$
$\kappa > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\kappa < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\kappa > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\kappa < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$\lambda > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\lambda > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

0	0	0	0	;
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	;	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	;	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	;
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;
$+\infty$	$-\infty$	;	$-\infty$	;
$-\infty$	$+\infty$	;	$-\infty$	;

2ο Κεφάλαιο

31. Απάντηση: Δ) . $f(x)=e^{x\ln x} \Rightarrow f'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=f(x)(\ln x+1)$

32. Απαντήσεις: Γ) και Δ) . Το Α είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού και όχι αναγκαστικά το πεδίο ορισμού άρα λάθος η Α. Το Β λάθος προφανώς και τα Γ και Δ προφανώς σωστά.

33. Απάντηση: Β) .
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.
Άρα το f (1) δεν είναι τοπικό μέγιστο ενώ το f (2) είναι τοπικό ελάχιστο.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$
			Τ.Ε.	

34. Απαντήσεις: Β) και Γ) . Η f' συνεχής και $f'(1)f'(2)<0$ άρα σωστή η Α). Η Β) προφανώς λάθος. Λόγω του Θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_1\in(1,2)$: $f'(x_1)=0$ και από το Θεώρημα Rolle στο $[0,x_1]$ υπάρχει $x_0\in(0,x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$. Όμως δεν είναι αναγκαστικά μοναδικό άρα λάθος η Γ) . Η Δ) προφανώς σωστή αφού f συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

35. Απάντηση: Β) . $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-3}{1}=-1$ και

$$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{2x-3}{2(x-1)}=-\infty .$$

36. Απαντήσεις: Β) , Γ) και Ε) . Αν $f(0)=f(3)$ από Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $x_1\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$ άτοπο. Για κάθε $\alpha<3<\beta$ είναι $f'(\alpha)f'(\beta)<0$ και f' συνεχής άρα σωστή η Β). Η f' αλλάζει σε δύο σημεία μονοτονία άρα η f αλλάζει σε αυτά τα σημεία κυρτότητα και είναι παραγωγίσιμη άρα είναι σημεία καμπής, δηλαδή σωστή η Γ). Η f έχει κρίσιμο σημείο το 3 άρα λάθος η Δ). Από ΘΜΤ στο $[x,3]$ για την f προκύπτει το ζητούμε άρα σωστή η Ε).

37. Απάντηση: Δ) . $f(1)=f(4)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ άρα λάθος η Α) και σωστή η Δ). Προφανώς λάθος και η Β) ομοίως. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$ αφού f συνεχής στο $[1,4]$ τότε $f\nearrow[1,4]$ άτοπο άρα λάθος η Γ).

38. Απάντηση: Β) . $f'(x)=5\eta\mu^4(\ln x)\left[\eta\mu(\ln x)\right]'=\dfrac{5\eta\mu^4(\ln x)\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}$

39. Απάντηση: Β) . Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)>0$. Ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f στο $[-1,0]$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα η Β) σωστή απάντηση και προφανώς δεν μπορεί να έχει 3 ρίζες.

40. Απάντηση: Δ) . $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}\overset{\alpha h=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\alpha\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=\alpha f'(x_0)$

41. Απάντηση: Β) . $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}}{h}=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ όπου $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ άρα $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}$.

42. Απαντήσεις: Α) και Β) . $f(-1)=f(1)=0$ άρα από το θεώρημα Rolle σωστή η Α). Η f είναι βαθμού 73 άρα η f' θα είναι 72 και σωστή η Β). Είναι $f'(x)=10\left(x^7+1\right)^9\cdot 7x^6\left(x^3-1\right)+\left(x^7+1\right)^{10}\cdot 3x^2$ άρα λάθος η Γ). Η f είναι πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 2 άρα δεν έχει ασύμπτωτες.

43. Απάντηση: Ε) . Η f είναι ρητή συνάρτηση με τον βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. Δεν ορίζεται το $f(-1)$ άρα δεν ισχύει το Θ.Rolle. $f(x)=\cdots=(x-1)\left(x^2+1\right)$, $x\neq -1$ και η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα δεν έχει ασύμπτωτες. Δεν είναι $f=g$ γιατί $D_f\neq D_g$. Είναι $k(0)=f(0)+h(0)=1>0$ και $k(1)=f(1)+h(1)=h(1)\le 0$ άρα $k(0)k(1)\le 0$ και με δύο περιπτώσεις η ρίζα είναι το 1 ή με Θ.Bolzano η ρίζα είναι στο (0,1).

44. Απάντηση: Γ) . $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=f'(x)$ όπου $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

45. Απαντήσεις: Β) και Γ) . $f'\nearrow[-3,-1]\Leftrightarrow f\cup[-3,-1]$, $f'\searrow[-1,1]\Leftrightarrow f\cap[-1,1]$ και $f'\nearrow[1,3]\Leftrightarrow f\cup[1,3]$ άρα έχει σημεία καμπής για $x=-1$ και για $x=1$. Η f θα έχει ακρότατα και στα άκρα του πεδίου ορισμού όχι μόνο όπου αλλάζει μονοτονία άρα λάθος η Β). Αν η f είχε 5 ρίζες τότε από θεώρημα Rolle η f' θα είχε 4 ρίζες πράγμα άτοπο, άρα λάθος η Γ). Το Δ) σωστό αφού η g κοίλη.

46. Απάντηση: Ε) . $f'(x)=5^{3x}\cdot\ln 5\cdot(3x)'=5^{3x}\cdot 3\ln 5=5^{3x}\cdot\ln 5^3=5^{3x}\cdot\ln 125$

47. Απαντήσεις: Α) και Γ) . Είναι $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$ αφού $f(0)f(2)>0$ άρα από το θεώρημα Bolzano σωστή η Α). Λάθος το Β) παρόλο που με θεώρημα Rolle έχουμε δύο οριζόντιες εφαπτομένες δεν ξέρουμε αν είναι μοναδικές. Το Γ) σωστό γιατί από ΘΜΤ στα [0,1] , [1,2] θα είναι $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$ και $f'(\xi_2)=f(2)-f(1)$ και αν $f(0)<0$, $f(1)>0$, $f(2)<0$ τότε $f'(\xi_1)>0$ και $f'(\xi_2)<0$ ενώ αν $f(0)>0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$ τότε $f'(\xi_1)<0$ και $f'(\xi_2)>0$. Το Δ) λάθος καθώς δεν ξέρουμε αν η f' είναι συνεχής.

48. Απάντηση: Γ) . $f'(x)=-3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\eta\mu(x+1)$ άρα $f'(\pi)=-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$.

49. Απάντηση: Β) . Παραγωγίζουμε ως προς t όχι ως προς x.

50. Απάντηση: Γ) . Η f είναι πολυωνυμική 6ου βαθμού, άρα αν την παραγωγίσουμε 7 φορές θα είναι η μηδενική συνάρτηση.

51. Απάντηση: Γ) . $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=4x\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\dfrac{1}{2}$

52. Απάντηση: Α) και Β) . $f' \nearrow (-\infty, x_2] \Rightarrow f \cup (-\infty, x_2]$, $f' \searrow [x_2, +\infty) \Rightarrow f \cap [x_2, +\infty)$ άρα η f παρουσιάζει καμπή στο x_2. Η εφαπτομένη διαπερνά την γραφική παράσταση της f' στα x_1, x_3 άρα είναι σημεία καμπής. Αν είχε 4 ρίζες τότε από Θ.Rolle η f' θα είχε 3 ρίζες άτοπο. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}$ δεν υπάρχει λόγω αλλαγής προσήμου από την γραφική, άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του DLH.

53. Απάντηση: Β) . Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και δεν μπορεί να την παριστάνει. Αν παρίστανε την f' θα ήταν $\ell_1 = f'(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to\alpha} f'(x) = \ell_2$ πράγμα άτοπο.

54. Απάντηση: Ε) . $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \cdots = (\beta-\alpha)e^{\beta x-\alpha x}$ και $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \frac{\beta}{\alpha}e^{\beta x-\alpha x}$ άρα

$(\beta-\alpha)\cancel{e^{\beta x-\alpha x}} = \frac{\beta}{\alpha}\cancel{e^{\beta x-\alpha x}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha\beta-\alpha^2-\beta=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

55. Απάντηση: Γ) και Ε) . $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
Για $c \neq 0$ οι f, g δεν είναι ίσες. Δεν προκύπτει με μετατόπιση κατά $c > 0$, μπορεί και να ταυτίζονται. Προφανώς Γ) σωστό. Για να δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο, θα πρέπει να είναι ίσες.

56. Απάντηση: Γ) . $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [-1,1]$ και $1 > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(0) = 0$.

57. Απάντηση: Β) . $f\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x) = 1$

Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$ και $f(3) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 3$ άρα για $x = 0$ είναι $f'(0)\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$ και για $x = 4$ είναι $f'(3)\left(f^{-1}\right)'(4) = 1$.

Επομένως $f'(0)\left(f^{-1}\right)'(0) = f'(3)\left(f^{-1}\right)'(4)$ και επειδή τα γινόμενα είναι ίσα με 1, τότε δεν μηδενίζονται, άρα $\frac{f'(0)}{f'(3)} = \frac{\left(f^{-1}\right)'(4)}{\left(f^{-1}\right)'(0)} = 4$.

58. Απαντήσεις: $1 \to \Delta$, $2 \to \Gamma$, $3 \to A$. (Υπολογίζοντας τα όρια)

59. Απαντήσεις: $(\alpha)\to(E)$, $(\beta)\to(A)$, $(\gamma)\to(B)$, $(\delta)\to(\Delta)$. Η παράγωγος στο (Α) είναι δίκλαδη σταθερή σε κάθε κλάδο ξεχωριστά, άρα η f θα είναι δίκλαδη πρωτοβάθμια σε κάθε κλάδο, δηλαδή η (β). Η παράγωγος στο (Δ) είναι σταθερή, άρα η f είναι πρωτοβάθμια, δηλαδή η (δ). Η παράγωγος στο (Ε) αλλάζει πρόσημο στο μηδέν, άρα η f θα έχει ακρότατο στο μηδέν και εύκολα λόγω προσήμου είναι ολικό ελάχιστο, άρα είναι η (α). Η παράγωγος στο (Β) αλλάζει τρεις φορές πρόσημο άρα η f θα έχει 3 τοπικά ακρότατα και είναι η (γ).

3ο Κεφάλαιο

60. Απάντηση: Δ) . $f'(x) = 6\eta\mu^2(2x)\sigma\upsilon\nu(2x) \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu^3(2x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ και $f(\pi) = 1$.

61. Απάντηση: Δ) . $f'(x)=\etaμπx \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\pi}συνπx+c$, $c\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{\pi}$ και

$f(1)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$.

62. Απάντηση: Γ) . $\left(-\ln|4-x|\right)'=-\frac{(4-x)'}{4-x}=\frac{1}{4-x}=f(x)$

63. Απάντηση: Α) και Γ) . Αφού $x>1$ τότε $\ln|1-x|=\ln(x-1)$ άρα

$\left(-\ln(x-1)\right)'=-\frac{(x-1)'}{x-1}=\frac{1}{1-x}=f(x)$ άρα παράγουσες της f είναι οι $-\ln(x-1)+c$, $c\in\mathbb{R}$

64. Απάντηση: Δ) . $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+c\right)'$, $x>0$

65. Απάντηση: Α) . $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

66. Απάντηση: Β) . $\int_1^3\ln x\,dx=\int_1^3\ln x(x)'dx=[x\ln x]_1^3-\int_1^3 1dx=3\ln3-(3-1)=3\ln3-2$

67. Απάντηση: Δ) . $E=\int_{-3}^{5}|f(x)|dx=\int_{-3}^{0}|f(x)|dx+\int_0^5|f(x)|dx=$

$=-\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_0^5 f(x)dx=\int_0^{-3}f(x)dx+\int_0^5 f(x)dx$

68. Απαντήσεις: Α) και Γ) . $\int_2^3 f(t)dt=\left[G(t)\right]_2^3=G(3)-G(2)=4$ άρα

$\int_{-1}^{2}\left(\int_2^3 f(t)dt\right)dx=\int_{-1}^{2}4\,dx=4(2+1)=12$. Το β) προφανώς λάθος δεν παίζει ρόλο το πρόσημο. Επειδή η G έχει 4 ρίζες τότε από το Θ.Rolle η f θα έχει 3 ρίζες. Το εμβαδόν στο Δ) είναι ίσο με $\int_{-1}^{3}|f(x)|dx$, όμως δεν ξέρουμε το πρόσημο της f άρα λάθος (θα ήταν σωστό αν $f(x)\geq0$ στο $[-1,3]$).

69. Απάντηση: Β) . $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+c\overset{x=0}{\Rightarrow}c=2$ άρα $f(x)=g(x)+2$ άρα Α), Γ) και Δ) λάθος. Το Β) σωστό γιατί $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx=\int_{-1}^{1}2\,dx=2(1+1)=4$.

70. Απαντήσεις: $Α)\to i)$, $Β)\to i)$, $Γ)\to ii)$. f' περιττή $\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f(-x)\right]'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=f(-x)+c\overset{x=1}{\Rightarrow}c=0$ άρα $f(x)=f(-x)\Rightarrow f$ άρτια .

f' περιττή $\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f''(x)=f''(-x)\Rightarrow f''$ άρτια .

$\int_{-1}^{1}xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\cancel{f'(1)}+\cancel{f'(-1)}-\left[f(x)\right]_{-1}^{1}==f(-1)-f(1)=0$.

71. Απάντηση: Γ) . Η $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f άρα $F'(x)=f(x)$ και $F'(1)=f(1)=2$ (σχήμα).

72. Απάντηση: Β) . $\int_{\alpha}^{\alpha+1} x dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} 2x dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} 2 dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^2\right]_{\alpha}^{\alpha+1} = 2\left(\cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha}\right) \Leftrightarrow \cancel{\alpha^2} + 2\alpha + 1 - \cancel{\alpha^2} = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

73. Απάντηση: Γ) . $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) dx = = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 4$.

74. Απάντηση: Β) . $\int_{1}^{\alpha^2+1} dx \leq 1 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 1 \leq 1 - 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

75. Απαντήσεις: Β) και Ζ) . Παρατηρούμε το πεδίο ορισμού.

76. Απάντηση: Δ) . Η συνάρτηση στο εσωτερικό του ολοκληρώματος ορίζεται στο $(0,1]$ άρα τα άκρα του ολοκληρώματος πρέπει να ανήκουν στο διάστημα αυτό. Άρα $0 < 1 - \alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -1 < \alpha \leq 1$ και $0 < 2\alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Τελικά $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

77. Απάντηση: Α) . $\left[2\right]_{\alpha}^{\beta} = 2 - 2 = 0$ γιατί $\left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$ και εδώ είναι $G(x) = 2$ άρα $G(\beta) = G(\alpha) = 2$. Για παράδειγμα έχουμε την $f(x) = 0$ και μία αρχική της είναι η $G(x) = 2$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha) = 2 - 2 = 0$.

www.Askisopolis.gr