ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \cdot lna$

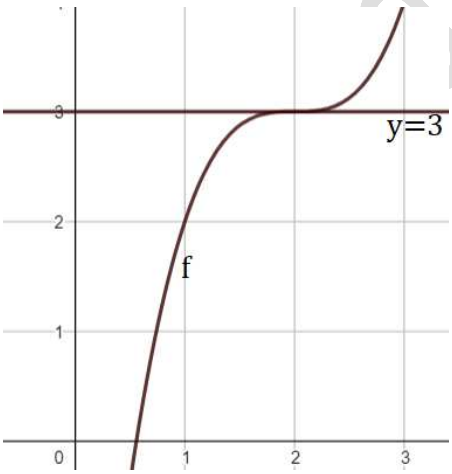
Α2) Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

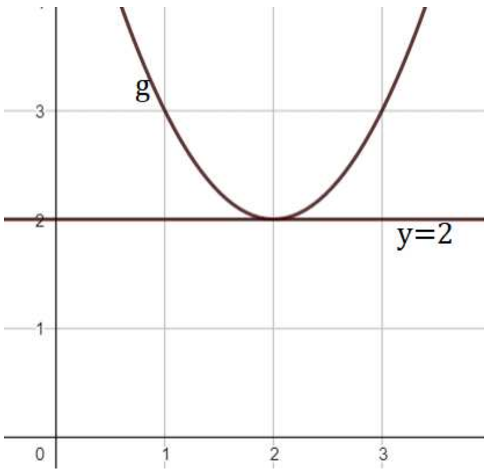
Α3)

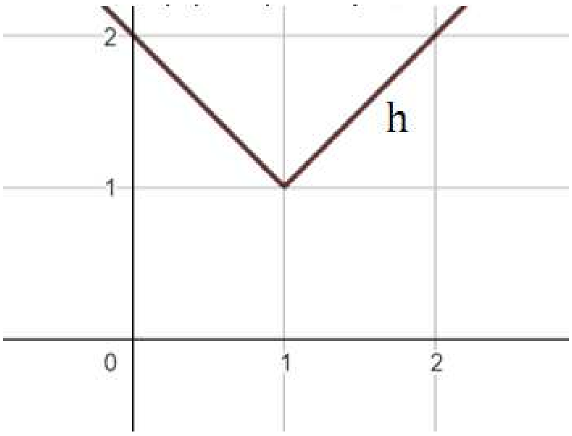
i)Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

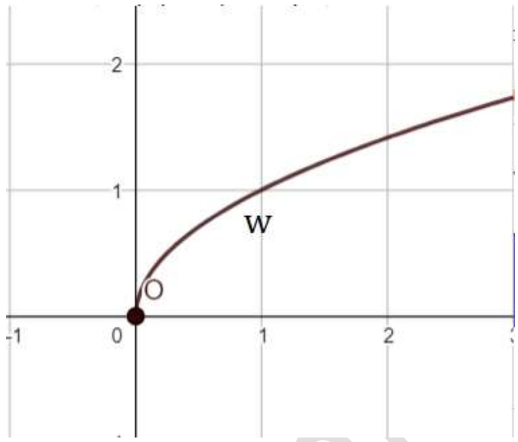
ii) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

iii)και να βρείτε ,εάν υπάρχουν, τα κρίσιμα σημεία στις γραφικές των συναρτήσεων f, g, h, w και τα ακρότατα









ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-a)^2(x-\beta)^2$ με $0 < \alpha < \beta$

Β1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

Β2) Εάν επιπλέον, γνωρίζετε ότι η ευθεία $y = -24x + 9$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $\Sigma(0, f(0))$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$

Για $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$

Β3) να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Β4) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x + 3) + f(e^{2x} + 3) = f(e^{5x} + 3) + f(e^{23x} + 3)$

Β5) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x-5)}{x-1}+\frac{f(\sigma\upsilon\nu x-23)}{x-3}=(x^2-1)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1,3)$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με

$$|e^{-x}\cdot f(x)|=1-x\cdot e^{-x}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Γ1) Να δείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Γ2) Εάν επιπλέον, ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^5}=\frac{23}{5}$ να δείξετε ότι $f(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}^*$

Γ3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Γ4) Να λύσετε την εξίσωση $f(5^x+ln23)+f\left(e^{x^5-1}+x^2+2020\right)=2$

Γ4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^{2(x-a)}+e^{-2a}\cdot x^2=1+2\cdot x\cdot e^{x-2a}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α

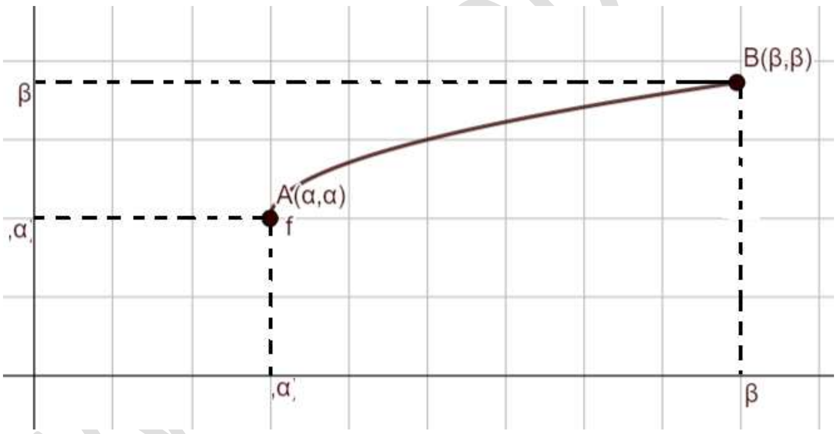
Γ5) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+x}{e^{3x}-e^{2x}}$$

$$ii)\ \lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)+x)\cdot \eta\mu\frac{1}{5^x}\right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f



Δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να χαράξετε την $C_{f^{-1}}$ (τη γραφική παράσταση της f^{-1}) στο ίδιο σχήμα.

Δ2) Εάν η κατακόρυφη απόσταση των C_f , $C_{f^{-1}}$ κάποια στιγμή γίνεται μέγιστη για $x=\xi\in(\alpha,\beta)$ να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι παράλληλες. (Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.)

Δ3) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-f(\xi)}{f^{-1}(\xi+h)-f^{-1}(\xi)}$$

Δ4) Να αποδείξετε υπάρχει σημείο $M\big(\xi_1, f(\xi_1)\big), \xi_1 \in (a, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της ε_1 C_f , σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{\pi}{4}$ rad. Στη συνέχεια να αποδείξετε η εφαπτομένη ε_2 της $C_{f^{-1}}$ στο $M'(f(\xi_1), \xi_1)$ είναι παράλληλη στην ε_1. (Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.)

Δ5) Εάν δύο σημεία Σ_1, Σ_2την ίδια χρονική στιγμή ξεκινάνε από το Α και το Σ_1 κινείται στη C_f ενώ το Σ_2 κινείται στη $C_{f^{-1}}$ και η ταχύτητα των προβολών τους στον άξονα $x'x$ ισούται με 1 μον. / δευτερόλεπτο και 2 μον/δευτερολεπτο αντίστοιχα, τότε τη στιγμή που το Σ_1 είναι στο $M\big(\xi_1, f(\xi_1)\big)$ και το Σ_2 στο $M'(f(\xi_1), \xi_1)$ να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Σ_2 είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του Σ_1.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \cdot ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x \cdot ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως:

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \cdot lna} \cdot lna = a^x \cdot lna$$

Α2) Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ και \ \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α3)

i) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία

- η f δεν παραγωγίζεται ή
- η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν,

λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ

ii) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)
-

iii) κρίσιμα σημεία της f είναι $x = 2$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα

κρίσιμα σημεία της g είναι $x = 2$ και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο

κρίσιμα σημεία της h είναι $x = 1$ και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο

η συνάρτηση w παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $\mathrm{x} = 0$ αλλά δεν είναι κρίσιμο σημείο

ΘΕΜΑ Β

Β1) Ισχύει $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση

$$f'(x) = 2(x-a)(x-\beta)^2 + 2(x-\beta)(x-a)^2 = 2(x-a)(x-\beta)(x-\beta+x-a)$$

$$= 2(x-a)(x-\beta)(2x-\beta-a)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Λύνω

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = \beta \text{ ή } x = \frac{a+\beta}{2}$$

x	$-\infty$ α	α $\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$ β	β $+\infty$
x-α	−	+	+	+
x-β	−	−	−	+
2x-α-β	−	−	+	+
$f'(x)$	−	+	−	+

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα

$$\Delta_1 = (-\infty, \alpha]\ ,\ \Delta_3 = \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$$

και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_2 = \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]\ ,\ \Delta_4 = [\beta, +\infty)$

παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στις θέσεις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = \beta$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_3 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

B2) Ισχύει ότι $\begin{cases} f(0) = -24 \cdot 0 + 9 \\ f'(0) = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 \cdot \beta^2 = 9 \\ -2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha+\beta) = -24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\overset{0<\alpha<\beta}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha \cdot \beta = 3 \\ \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha+\beta) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta = 3 \\ 3 \cdot (\alpha+\beta) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta = 3 \\ (\alpha+\beta) = 4 \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος θα είναι οι ρίζες του τριωνύμου με $S = 4$ και $P = 3$ δηλαδή $x^2 - 4x + 3$ οπότε $x = 1$ ή $x = 3$ και επειδή $\alpha < \beta$

τότε $\alpha = 1$, $\beta = 3$ οπότε

$$f(x) = (x-1)^2(x-3)^2 = [(x-1)(x-3)]^2 = (x^2 - 4x + 3)^2$$

B3) για $\alpha = 1$, $\beta = 3$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα

$$\Delta_1 = (-\infty, 1] \, , \Delta_3 = [2,3]$$

και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_2 = [1,2]$, $\Delta_4 = [3, +\infty)$

οπότε $f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$, $f(\Delta_3) = [f(3), f(2)] = [0,1]$ και

$f(\Delta_2) = [f(1), f(2)] = [0,1]$, $f(\Delta_4) = \left[f(3), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = [0, +\infty)$

Τελικά $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

B4) Παρατηρώ ότι $e^x + 3 > 3$, $e^{2x} + 3 > 3, e^{5x} + 3 > 3, e^{23x} + 3 > 3$

και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

για $x = 0$ τότε $f(4) + f(4) = f(4) + f(4)$ προφανής ρίζα

για $x > 0$ τότε $e^x < e^{5x} \Leftrightarrow e^x + 3 < e^{5x} + 3 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(e^x + 3) < f(e^{5x} + 3)$

και $e^{2x} < e^{23x} \Leftrightarrow e^{2x} + 3 < e^{23x} + 3 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(e^{2x} + 3) < f(e^{23x} + 3)$

με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$f(e^x+3)+f(e^{2x}+3)<f(e^{5x}+3)+f(e^{23x}+3)$$

για $x<0$ τότε $e^x>e^{5x}\Leftrightarrow e^x+3>e^{5x}+3\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(e^x+3)>f(e^{5x}+3)$

και $e^{2x}>e^{23x}\Leftrightarrow e^{2x}+3>e^{23x}+3\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(e^{2x}+3)>f(e^{23x}+3)$

με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$f(e^x+3)+f(e^{2x}+3)>f(e^{5x}+3)+f(e^{23x}+3)$$

Δηλαδή για $x\neq 0$ είναι

$$f(e^x+3)+f(e^{2x}+3)\neq f(e^{5x}+3)+f(e^{23x}+3)$$

Οπότε μοναδική λύση $x=0$

Β5) για $x\in[1,3]$ η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών $[0,1]$ άρα ισχύει ότι

$0\leq f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in[1,3]$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνο για $f(1)=0\,,f(3)=1$

η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x-5)}{x-1}+\frac{f(\sigma\upsilon\nu x-23)}{x-3}=(x^2-1)$$

ισοδύναμα γράφεται

η εξίσωση

$$f(\eta\mu x-5)(x-3)+f(\sigma\upsilon\nu x-23)(x-1)=(x^2-1)(x-3)(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\eta\mu x-5)(x-3)+f(\sigma\upsilon\nu x-23)(x-1)-(x^2-1)(x-3)(x-1)=0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x)=f(\eta\mu x-5)(x-3)+f(\sigma\upsilon\nu x-23)(x-1)-(x^2-1)(x-3)(x-1)$$

Ορισμένη και συνεχή στο [1,3] και

$$h(1)=-2f(\eta\mu x-5)\leq -2<0$$

$$h(3)=2f(\sigma\upsilon\nu x-23)\geq 0$$

και επειδή $\sigma\upsilon\nu x-23\neq 1$ τότε $h(3)=2f(\sigma\upsilon\nu x-23)>0$

οπότε $h(1)h(3) < 0$ τότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\eta\mu x - 5)(x-3) + f(\sigma\upsilon\nu x - 23)(x-1) - (x^2-1)(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\eta\mu x - 5)}{x-1} + \frac{f(\sigma\upsilon\nu x - 23)}{x-3} = (x^2-1)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1,3)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Επειδή $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ τότε

$$|e^{-x} \cdot f(x)| = 1 - x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} \cdot |f(x)| = 1 - x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} |f(x)| = e^x - x \ \ (1)$$

Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^x - x = 0$ αδύνατη διότι

$$e^x \geq x + 1 > x \Leftrightarrow e^x - x > 0$$

Επειδή $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ τότε από συνέπειες θεωρήματος Bolzano η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ_1. Όμοια, επειδή $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ τότε από συνέπειες θεωρήματος Bolzano η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ_2. Συνεπώς ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Γ2) για $x \neq 0$ θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-1}{x^5}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{23}{5}$

Λύνω ως προς $f(x) = g(x)x^5 + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[g(x)x^5 + 1] \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{23}{5} \cdot 0 + 1 = 1 > 0$$

Τότε $f(x) > 0$ σε διάστημα της μορφής $(0-\delta, 0+\delta), \delta > 0$ δηλαδή «κοντά στο 0» και επειδή η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 καταλήγω στο συμπέρασμα ότι $f(x) > 0\,, x \in \mathbb{R}^*$

Οπότε η σχέση (1) δίνει $f(x) = e^x - x\,, x \in \mathbb{R}^*$

Γ3) Ισχύει $f'(x) = e^x - 1\,, x \in \mathbb{R}^*$

λύνω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ απορρίπτεται.

Λύνω $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
f	↘		↗

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ τότε
$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ τότε
$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$

Τελικά $f(\mathbb{R}^*) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_1) = (1, +\infty)$

Γ3) Από το σύνολο τιμών καταλήγω στο συμπέρασμα ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Παρατηρώ ότι $5^x + ln23 > 0$ και $e^{x^5-1} + x^2 + 2020 > 0$ άρα η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\begin{cases} f(5^x + ln23) > 1 \\ f\left(e^{x^5-1} + x^2 + 2020\right) > 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(5^x + ln23) + f\left(e^{x^5-1} + x^2 + 2020\right) > 2$$

Τελικά η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

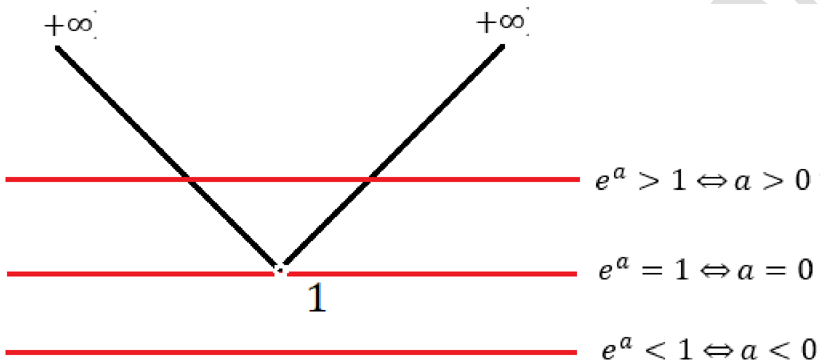
Γ4) η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$e^{2(x-a)} + e^{-2a} \cdot x^2 = 1 + 2 \cdot x \cdot e^{x-2a} \Leftrightarrow e^{2x-2a} + e^{-2a} \cdot x^2 = 1 + 2 \cdot x \cdot e^{x-2a} \overset{\cdot e^{2a}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + x^2 = e^{2a} + 2xe^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2xe^x + x^2 = e^{2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - x)^2 = (e^a)^2 \Leftrightarrow |e^x - x| = e^a \overset{e^x > x}{\Longleftrightarrow} f(x) = e^a$$

με μία πρόχειρη χάραξη παρατηρούμε ότι



Για $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$ τότε

$$\begin{cases} \alpha \in f(\Delta_1) \\ f \searrow \sigma\tau o\ \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha\kappa\rho\iota\beta\acute{\omega}\varsigma\ 1\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \Delta_1$$

$$\begin{cases} \alpha \in f(\Delta_2) \\ f \nearrow \sigma\tau o\ \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha\kappa\rho\iota\beta\acute{\omega}\varsigma\ 1\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \Delta_2$$

Τελικά ακριβώς δύο λύσεις στο $D_f = \mathbb{R}^*$

Για $e^a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 0$ τότε επειδή $\alpha \notin f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}^*$

Γ5)

$$i) \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)+x}{e^{3x}-e^{2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^{3x}-e^{2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^{2x}(e^x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x}\cdot\frac{1}{(e^x-1)} = -\infty$$

Διότι $e^x > 0$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(e^x-1)} = \frac{1}{0-1} = -1$

$$ii) \lim_{x\to+\infty} \left[(f(x)+x)\cdot \eta\mu\frac{1}{5^x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \cdot \eta\mu\frac{1}{5^x}\right) =$$

Πολ/ζω και διαιρώ με 5^x

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{5^x}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^x}}\right) = 0$$

Διότι $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{5}\right)^x = 0$ αφού $\frac{e}{5} < 1$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

Θέτω $y = \frac{1}{2^x}$ όταν το $x \to +\infty$ τότε $y \to y_0$ με $y_0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) πεδίο ορισμού $D_f = [a,\beta]$ και σύνολο τιμών $f(D_f) = [a,\beta]$. Από σχήμα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Δ2) η κατακόρυφη απόσταση εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$h(x) = |f(x) - f^{-1}(x)|, x \in [a,\beta]$$

Όμως από σχήμα $f(x) \geq f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) - f^{-1}(x) \geq 0$ οπότε

$h(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $x \in [a, \beta]$

Η συνάρτησης h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά μεταξύ συνεχών συναρτήσεων από θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής υπάρχει

$$\xi \in [a, \beta]$$

τέτοιο ώστε η συνάρτηση h να έχει μέγιστη τιμή. Επειδή όμως η $h(x) \geq 0$ και $h(a) = h(\beta) = 0$ προκύπτει ότι $\xi \in (a, \beta)$. Συνεπώς η συνάρτηση h έχει μέγιστο στο $x = \xi$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του (α, β) και είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε από θεώρημα Fermat

$$\mathrm{h}'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = (f^{-1})'(\xi)$$

Δηλαδή οι εφαπτομένες των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι παράλληλες.

Δ3) ισχύει

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-f(\xi)}{f^{-1}(\xi+h)-f^{-1}(\xi)} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(\xi+2h)-f(\xi)}{h}}{\dfrac{f^{-1}(\xi+h)-f^{-1}(\xi)}{h}} = \ell$$

Από ορισμό ,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(\xi+h)-f^{-1}(\xi)}{h} = (f^{-1})'(\xi)$$

Και θέτω $y = 2h \Leftrightarrow \frac{y}{2} = h$ τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-f(\xi)}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{f(\xi+y)-f(\xi)}{\dfrac{y}{2}} = 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{f(\xi+y)-f(\xi)}{y} = 2f'(\xi)$$

Τελικά,

$$\ell = \frac{2f'(\xi)}{(f^{-1})'(\xi)} = \frac{2\cdot 1}{1} = 2$$

Δ4) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε από θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1$$

Αρα η εφαπτομένες ε_1 σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{\pi}{4}$ rad διότι $\varepsilon\varphi\omega = f'(\xi_1) = 1$.

Επιπλέον Όμως $f^{-1}(f(x)) = x, x \in [a.b]$, άρα $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1,, x \in [a.b]$

Άρα $(f^{-1})'(f(\xi_1))f'(\xi_1) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(\xi_1)) = 1$. Αρα $\varepsilon_1 || \varepsilon_2$.

Δ5)

Δεδομένα	η ταχύτητα των προβολών τους στον άξονα $x'x$ ισούται με με 2 μον/δευτ.	$x_1'(t) = 1, x_2'(t) = 2$
	τη στιγμή $t = t_o$ που το Σ_1 είναι στο $(\xi_1, f(\xi_1))$	$x_1(t_0) = \xi_1$
	τη στιγμή που το Σ_2 είναι στο $(\xi_2, f(\xi_2))$	$x_2(t_0) = f(\xi_1)$
Ζητούμενο	να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Σ_1 είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του Σ_2.	$y_2'(t_0) = 2 \cdot y_1'(t_0)$

Ισχύει ότι $y_1(t) = f\big(x(t)\big)$

Παραγωγίζω ως προς t προκύπτει

$$y_1{}'(t) = f'\big(x(t)\big) \cdot x'(t) = f'\big(x(t)\big) \cdot 1 = f'\big(x(t)\big)$$

Για $t = t_0$ τότε $y_1{}'(t_0) = f'\big(x(t_0)\big) = f'(\xi_1) = 1$.

Ισχύει ότι $y_2(t) = f^{-1}\big(x(t)\big)$

Παραγωγίζω ως προς t προκύπτει

$$y_2{}'(t) = (f^{-1})'\big(x_2(t)\big) \cdot x_2{}'(t) = (f^{-1})'\big(x_2(t)\big) \cdot 2$$

Για $t = t_0$ τότε $y_2{}'(t_0) = (f^{-1})'\big(x_2(t_0)\big) \cdot 2 = (f^{-1})'\big(f(\xi_1)\big) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.

Αρα $y_2{}'(t_0) = 2 \cdot y_1{}'(t_0)$.

Ευχόμαστε επιτυχία

Μιχάλης Δ. – Ντάνος Γ