1-6-2020

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο.Π ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ – ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
(ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Μονάδες 7

Α.2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 3**

Α.3. Ο ισχυρισμός:

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό»,

είναι αληθής ή ψευδής;

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α.4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

i. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f \circ g = g \circ f$

ii. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0

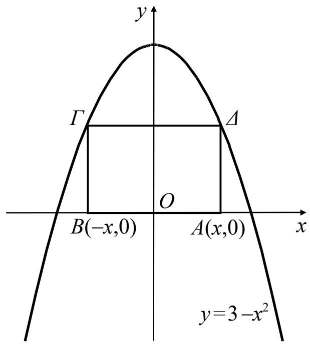
iv. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο x_0 ε[α,β] τότε είναι πάντα $f'(x_0) = 0$.

v. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο [α,β] με f(α)<f(β), τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y(x)=3-x^2$, $x\varepsilon\mathbb{R}$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της y, τέτοιο ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο



Β1.Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης y τέμνει τον άξονα x΄x και στη συνέχεια της συναρτήσεις Π και Ε που παριστάνουν την περίμετρο και το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, συναρτήσει του x.

Μονάδες 5

Αν $E(x)=f(x)=-2x^3+6x$ και $\Pi(x)=g(x)=-2x^2+4x+6$, $x\in(0,\sqrt{3})$

Β2.Βρείτε το x, ώστε το εμβαδό του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο, καθώς και τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{g'(x)}{f(x)-g(x)+4}\right]$

Μονάδες 3

Β3. Αν $\alpha\varepsilon\left(0,\sqrt{3}\right)$ με $\alpha\neq 1$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(α,f(α)).

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ε) συνεχώς μειώνεται.

Μονάδες 4

γ. Έστω Κ το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) με τον xx΄. Καθώς το Μ απομακρύνεται από τον άξονα yy΄, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1μ/sec. Τη στιγμή $a'(t_0)=2a(t_0)$, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Κ

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται συναρτήσεις:

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+2e^{x+1}-1}{x+1}=2$
- $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{a^x}{1-e^x}$ όπου α πραγματική θετική σταθερά
- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=e^x-1$

Γ1. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε): $y=y_0$ της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$.

Μονάδες 5

Αν είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-y_0\right)=0$

Γ2. Να δείξετε ότι α=e.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει θετική ρίζα για την εξίσωση $g(x+1)-g(2x+1)+xg'(x)=0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και ότι $g^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε την συνάρτηση $t(x)=\left(g^{-1}oh\right)(x)$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[t(x)\eta\mu\left(g(x)+1\right)\right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=(x-3+\alpha)\ln(x+\beta)$ με $\alpha,\beta\in(0,4)$ και $f(\alpha)+f(\beta)=\frac{3}{2}$.

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι α=β=2.

Μονάδες 3

Δ4.Να δείξετε ότι η εξίσωση $kx^3+(1-4k)x^2-x+4=0$ (1) είναι ισοδύναμη με την f(x)=k, $k\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι

α. $g'(x)\geq\ln 3$ για κάθε $x\geq 1$.

Μονάδες 4

β. $g(\lambda+2)\geq\ln 3+\lambda\ln(\lambda+3)$ για κάθε $\lambda\geq 0$

Μονάδες 5

Ενδεικτικές Λύσεις

Επιμέλεια : Νίκος Ελευθερίου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο, Απόδειξη στη σελίδα 145

Α2. Σχολικό Βιβλίο, Ορισμός στη σελίδα 95

Α3. Ψευδής. Βλ. Σχολικό Βιβλίο, στη σελίδα 99

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $y(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Για το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, πρέπει $x > 0$ και $(A\Delta) > 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x \in (0, \sqrt{3})$. Έχουμε για το εμβαδόν

$$E = (AB)(A\Delta) \Rightarrow E(x) = 2x(3 - x^2) \Rightarrow E(x) = -2x^3 + 6x, \quad x \in (0, \sqrt{3})$$

και για την περίμετρο

$$\Pi = 2 \cdot ((AB) + (A\Delta)) \Rightarrow \Pi(x) = 2[2x + (3 - x^2)] \Rightarrow \Pi(x) = -2x^2 + 4x + 6, \quad x \in (0, \sqrt{3})$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -6x^2 + 6$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $\max f = f(1)$, δηλαδή το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 4 τ.μ.

Β3. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{g'(x)}{f(x) - g(x) + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{-4x + 4}{-2x^3 + 2x^2 + 2x - 2} = -2 \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - x + 2} = -2 \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x^2-1)} = -2 \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0$ και η παράσταση $x^2 - 1$ δεν διατηρεί πρόσημο γύρω από το 2. Άρα, το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2 - 1}$, οπότε και το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Β4. α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ είναι

$$(\epsilon) : y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow (\epsilon) : y + 2a^3 - 6a = -6(a^2 - 1)(x - a) \Leftrightarrow (\epsilon) : y = -6(a - 1)x + 2a^2(3 - a)$$

β. Η κλίση της (ϵ) είναι $\lambda(a) = -6(a - 1)$ που είναι παραγωγίσιμη με $\lambda'(a) = -6 < 0$ για κάθε $a \in (0, \sqrt{3})$, οπότε η λ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, η κλίση της ϵ συνεχώς μειώνεται.
γ. Για να τέμνει η ϵ τον άξονα $x'x$ στο $K(x_K, 0)$ πρέπει

$$y = 0 \Leftrightarrow 2a(a^2 - 3) = -6(a^2 - 1)(x_K - a) \overset{a\neq 1}{\Longleftrightarrow} x_K(a) = \frac{2a^3}{3(a^2 - 1)}, \quad a \neq 1$$

Είναι

$$\frac{dx_K}{da} = \frac{6a^2(3a^2-3) - 2a^3(6a)}{9(a^2-1)^2} = -2\left(\frac{a}{a^2-1}\right)^2$$

Όταν ισχύει $a'(t_0) = 2a(t_0)$ θα είναι $a(t_0) = \frac{1}{2}$, αφού $a'(t) = 1\frac{\mu}{\mathrm{s}}$, οπότε $\left.\frac{dx_K}{da}\right|_{t_0} = -\frac{8}{9}$. Άρα έχουμε

$$\frac{dx_K}{dt} = \frac{dx_K}{da}\frac{da}{dt} \Rightarrow \frac{dx_K}{dt} = -\frac{8}{9}\frac{\mu}{\mathrm{s}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής, έχουμε

$$y_0 = f(-1) = \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}\left[f(x) + 2e^{x+1} - 1 - 2e^{x+1} + 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to-1}\left[\frac{f(x)+2e^{x+1}-1}{x+1}(x+1) - 2e^{x+1} + 1\right] = 2\cdot 0 - 2e^0 + 1 = -1$$

Γ2. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+1) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1-e^x} = -1$. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1-e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{e^x\left(e^{-x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{e}\right)^x\frac{1}{e^{-x}-1}$$

- Αν $a > e$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = (+\infty)\frac{1}{0-1} = -\infty$.
- Αν $a = e$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{0-1} = -1$.
- Αν $0 < a < e$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0\frac{1}{0-1} = 0$.

Άρα, $a = e$.

Γ3. Για $x > 0$ είναι

$$g(2x+1) - g(x+1) = xg'(x) \Leftrightarrow \frac{g(2x+1)-g(x+1)}{x} = g'(x)$$

Από το ΘΜΤ για τη g στο διάστημα $[x+1, 2x+1]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x+1, 2x+1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = \frac{g(2x+1)-g(x+1)}{x}$, οπότε $g'(\xi) = g'(x)$. Η g είναι δις-παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} \quad \text{και} \quad g''(x) = -\frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} < 0$$

για κάθε $x > 0$, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, είναι $\xi = x$. Όμως, $x+1 < \xi < 2x+1 \Leftrightarrow x+1 < x \Leftrightarrow 1 < 0$, άτοπο. Άρα, η δεδομένη εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

Γ4. Είναι $g'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{0}{1-0} = 0$ και $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x}{1-e^x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^-} e^x = 1 > 0$, $\lim\limits_{x\to0^-}(1-e^x) = 0$ και $1 - e^x > 0$, για κάθε $x < 0$. Οπότε $g(-\infty, 0) = (0, +\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$ και $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{1-e^x} = -\infty$. Οπότε $g(0, +\infty) = (-\infty, -1)$.

Επειδή επιπλέον τα δύο διαστήματα τιμών της g είναι ξένα μεταξύ τους, η g είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται και είναι $D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}^*) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $y \in D_{g^{-1}}$ ισχύει $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$. Για $x \in \mathbb{R}^*$ και $y \in D_{g^{-1}}$ έχουμε

$$y = \frac{e^x}{1-e^x} \Leftrightarrow y - ye^x = e^x \Leftrightarrow e^x(1+y) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{1+y}$$

Άρα, $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Γ5. Για το πεδίο ορισμού της t είναι

$$\left.\begin{cases} x \in D_h = \mathbb{R} \\ h(x) \in D_{g^{-1}} \Leftrightarrow h(x) \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x > 0$$

Έχουμε

$$t(x) = g^{-1}(h(x)) = \ln\frac{e^x-1}{1+e^x-1} \Rightarrow t(x) = \ln(e^x-1) - x, \quad x > 0$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$|t(x)\eta\mu(g(x)+1)| \leqslant |t(x)|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) = \ln 1 = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\left[t(x)\eta\mu(g(x)+1)\right] = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f ορίζεται στο $A = (-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{(x-4)^2} - \frac{2}{x^3}$$

Για τα κρίσιμα σημεία της f είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow (x-2)(x^2+16) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		↗	‖	↘	ΤΕ	↗	‖	↗	

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = \frac{3}{4}$.

Δ2. Λόγω της μονοτονίας της f έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, άρα $f\left((-\infty,0)\right) = (0,+\infty)$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ και $f(2) = \frac{3}{4}$, άρα $f\left((0,2]\right) = \left[\frac{3}{4},+\infty\right)$
- $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, άρα $f\left([2,4)\right) = \left[\frac{3}{4},+\infty\right)$
- $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, άρα $f\left((4,+\infty)\right) = (-\infty,0)$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι $f\left((-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)\right) = \mathbb{R}^*$.

Δ3. Για κάθε $x \in (0,4)$ ισχύει $f(x) \geqslant \frac{3}{4}$ με το ¨=¨ να ισχύει μόνο για $x = 2$. Επομένως, για να ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, για τα $\alpha, \beta \in (0,4)$, θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

Δ4. Με αντικατάσταση βλέπουμε ότι τα $\{0,4\}$ δεν είναι ρίζες της δεδομένης εξίσωσης. Οπότε, για $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,4\}$ έχουμε

$$kx^3+(1-4k)x^2-x+4=0 \Leftrightarrow kx^2(x-4)+x^2-x+4=0 \Leftrightarrow kx^2(4-x)=x^2+(4-x) \Leftrightarrow k=\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x)=k$$

Για τις ρίζες της, από τα επί μέρους διαστήματα τιμών της f (Δ2) και λόγω της μονοτονίας της (Δ1) έχουμε:

- Για $k<0$ έχει μοναδική ρίζα.
- Για $k=0$ είναι αδύνατη.
- Για $0<k<\frac{3}{4}$ έχει μοναδική ρίζα.
- Για $k=\frac{3}{4}$ έχει δύο ρίζες.
- Για $k>\frac{3}{4}$ έχει τρεις ρίζες.

Δ5. α. Είναι $g(x)=(x-1)\ln(x+2)$, $x>-2$ που είναι δις-παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\ln(x+2)+\frac{x-1}{x+2} \quad \text{και} \quad g''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

για κάθε $x>-2$, οπότε η g' είναι γνησίως αύξουσα. Για $x \geqslant 1$ είναι $g'(x) \geqslant g'(1) \Leftrightarrow g'(x) \geqslant \ln 3$.
β. Για $\lambda \geqslant 0$ από το ΘΜΤ για τη g στο διάστημα $[\lambda+1, \lambda+2]$, υπάρχει $\xi \in (\lambda+1, \lambda+2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(\lambda+2)-g(\lambda+1)}{\lambda+2-\lambda-1} \stackrel{\xi>1}{\Longleftrightarrow} g(\lambda+2)-g(\lambda+1) \geqslant \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(\lambda+2) \geqslant \ln 3+\lambda\ln(\lambda+3)$$

για κάθε $\lambda \geqslant 0$.