



ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ – ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΕΞΙ (6)**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**A2.** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μίας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

" Αν η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , τότε υποχρεωτικά  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ ."

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

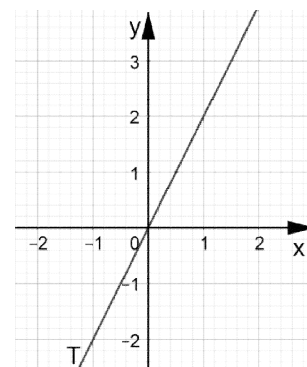
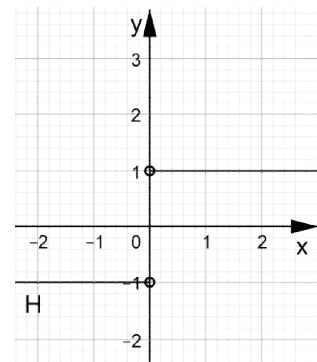
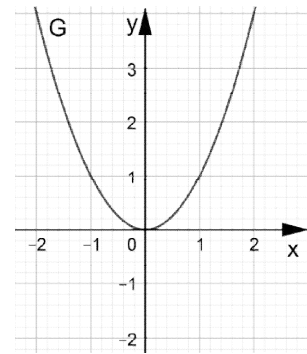
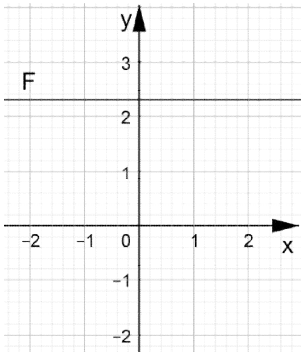
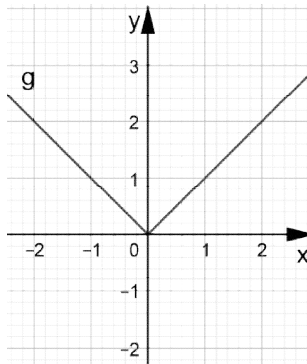
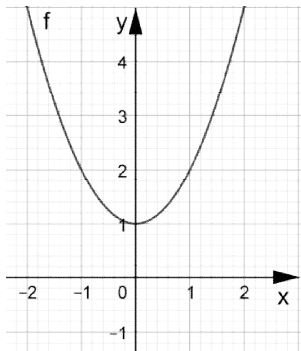
ΜΟΝΑΔΑ 1

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3



Α4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις  $F, G, H, T$  μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  και ποια της  $g$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6



**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να τέμνει μία ασύμπτωτη της.

**β.** Αν  $f(x) = \ln|x|$ , για κάθε  $x \neq 0$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**γ.** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ , αν  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**δ.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , τότε υποχρεωτικά  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

**ε.** Αν μία συνάρτησης  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά ελάχιστα της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ .

i. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4



iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

iv. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

v. Να γίνει πίνακας μεταβολών και με τη βοήθειά του, η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

vi. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 > 0$  για το οποίο δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2021}{4f(x) - ex + 3}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax$  και  $g(x) = e^x$ , με  $a, x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

i. α. Να δείξετε ότι  $a=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β. Να δείξετε ότι το σημείο  $\Gamma(2,1)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , απέχει την μικρότερη απόσταση από την ευθεία  $(\varepsilon): x-y=2$ .

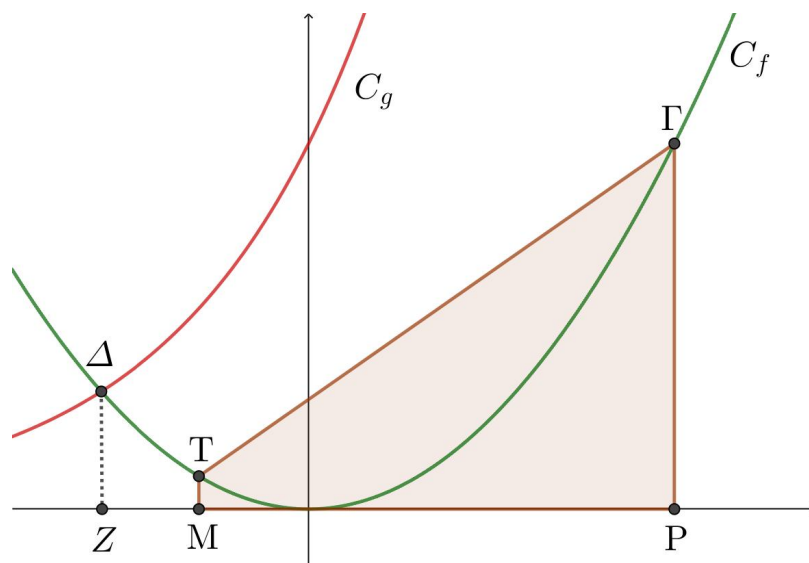
ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο  $\Delta$  με τετμημένη  $x_0 \in (-2,0)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5



- β. Έστω  $P$  και  $Z$  οι προβολές των  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα στον  $xx'$ . Αν  $T$  τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  με  $x_0 < x_T < 0$  και  $M$  η προβολή του στον  $xx'$  να δικαιολογήσετε γιατί καθώς το  $x_T$  αυξάνεται, μειώνεται το εμβαδό του  $TMP\Gamma$ .



ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- iii. Στρατιωτικό ελικόπτερο  $\Sigma$  εκτελεί νυχτερινή περιπολία, κινούμενο σε τροχιά καμπύλης, με τύπο , τον τύπο της  $f$  με  $x \geq 0$  .

- α. Δείξτε ότι η θέση  $\Sigma_0$  του ελικοπτερου, όπου ο ρυθμός μεταβολής  $x$  του  $\Sigma$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $y$ , αν υποθέσουμε ότι  $x'(t) > 0$  , για κάθε  $t > 0$ , είναι το σημείο  $\Gamma$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

- β. Ένας αισθητήρας ήχου βρίσκεται κάτω από το έδαφος, σε σημείο με συντεταγμένες  $N(2,-4)$ . Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική θέση  $\Sigma_1$  της τροχιάς του ελικοπτερου, όπου ο αισθητήρας καταγράφει τη μέγιστη ένδειξή του.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5



## ΘΕΜΑ Δ

Έστω  $f: R \rightarrow R$ , παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε  $f^3(x) + x^2 f(x) = x \eta \mu^2 x$  για κάθε  $x \neq 0$ .

i. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ , με  $x_0 \in (0, \pi)$  στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , είναι παράλληλη στον άξονα  $xx'$ . Είναι το σημείο αυτό μοναδικό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Δείξτε ότι υπάρχει  $x_1 \in [1, 5]$ :  $f(x_1) = \sqrt[3]{f(2)f(3)f(4)}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iii. Να αποδείξετε ότι  $(f'(0))^3 + f'(0) = 1$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

iv. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x = \frac{1}{x^2 + 1}$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

v. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_2=0$  σχηματίζει με τον άξονα  $xx'$  γωνία  $\omega$  με  $\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{\pi}{4}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4