ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

3ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ – Γ΄ ΤΑΞΗ

ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει : $f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f : A\to R$ λέγεται “1-1” ;

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ;

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό .

« Αν η $f\,'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in R$, τότε το f(1) είναι τοπικό μέγιστο της f(x).»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή με το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α).

Μονάδες 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

β. $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 0$

γ. $(\alpha^x)' = x\cdot\alpha^{x-1}$, $\alpha > 0$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Έστω οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύουν :

- $(f \circ g)(x) = \ln(e^x-1) + 1$, $x > 0$
- $g(x) = 2 - e^x$, $x \in R$

Β1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(1-x) + 1$, $x < 1$

Μονάδες 4

Β2. Να δείξετε ότι η f(x) αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 7

Αν $f^{-1}(x) = 1 - e^{x-1}$, $x \in R$, τότε :

Β3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} και η ευθεία $y = x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα yy' , εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 8

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση f : R→R με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + 5}$,όπου $x \in R$ και $\alpha \in R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ *Μονάδες 4*

Για $\alpha = -4$,

Γ2. Να βρεθεί το όριο $K = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^2(x) - xf(x)}{x}$

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε την f(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο R.

Μονάδες 7

Γ4. Αν $x_1 < x_2$, οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης , να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f'(x) + f(x) = e$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1 , x_2)

Μονάδες 5

Γ5. Ένα κινητό Μ ξεκινά απ΄ το σημείο $A(2, f(2))$ και κινείται κατά μήκος της C_f με $x \geq 2$. Να βρείτε, σε ποιο σημείο της C_f, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ ισούται με το πηλίκο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του Μ προς την τεταγμένη του Μ.

Δίνεται ότι $x'(t) > 0$ για κάθε t, όπου t ο χρόνος σε sec και $t \geq 0$.

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και για την οποία ισχύουν :

- $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in R$
- $e^{f(0)-1} = f(0)$
- $f'(1) > 0$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την f(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $e^{f'(f(x)-1)} = 1$

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδειχθεί ότι $2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$ για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .
3. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των θεμάτων .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΕΞΙ (6)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33 – Ορισμός.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73 – Ορισμός (δεύτερη τελίτσα)

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό .

« Αν η $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in R$, τότε το f(1) είναι τοπικό μέγιστο της f(x).»

α) Ψ

β) Η f(x) είναι συνεχής σε όλο το R άρα και στο $x_0 = 1$. Για κάθε

$x \in (-\infty,1) \cup (1,2)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘		↗

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ **Λ**

β. $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ **Σ** σελίδα 53 σχολικού

γ. $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$, $\alpha > 0$ **Λ** σελίδα 116 σχολικού

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύουν :

- $(f \circ g)(x) = \ln(e^x - 1) + 1$, $x > 0$
- $g(x) = 2 - e^x$, $x \in R$

Β1. Θέτω $u = g(x) \Leftrightarrow u = 2 - e^x \Leftrightarrow e^x = 2 - u$, $2 - u > 0$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u) = \ln(2-u-1) + 1 \Leftrightarrow f(u) = \ln(1-u)+1$, $u < 1$

Β2. Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ και $f'(x) = \frac{1}{x-1} < 0$ για κάθε $x < 1$.

Άρα η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο Π.Ο της $\Rightarrow$ η f(x) είναι 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $f^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών της f(x). Άρα,

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty , +\infty) = R$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (\ln(1-x)+1) = \lim\limits_{u\to +\infty}(\ln u + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(\ln(1-x)+1) = \lim\limits_{u\to 0^+}(\ln u + 1) = -\infty$, $x<1$ ή $1-x>0$

$y = f(x)$, $x \in (-\infty, 1)$, $y \in R \Leftrightarrow y - 1 = \ln(1-x) \Leftrightarrow e^{y-1} = 1 - x \Leftrightarrow$

$x = 1 - e^{y-1}$ και $x \in (-\infty, 1)$, άρα $f^{-1}(x) = 1 - e^{x-1}$, $x \in R$.

Β3. Είναι $f^{-1}(x) = x$, $x \in R \Leftrightarrow 1 - e^{x-1} = x \Leftrightarrow 0 = x - 1 + e^{x-1}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\rho(x) = e^{x-1} + x - 1$, $x \in R$,

- είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και
- είναι συνεχής στο [0,1]
- $\rho(0) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$
- $\rho(1) = 1 > 0$

άρα από Θ. Μπολτζάνο υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$\rho(x_0) = 0$

Β4. Το σημείο τομής της f(x) με τον yy΄ είναι το $(0, f(0)) = (0,1)$

Η εφαπτομένη της f(x) στο (0,1) είναι η :

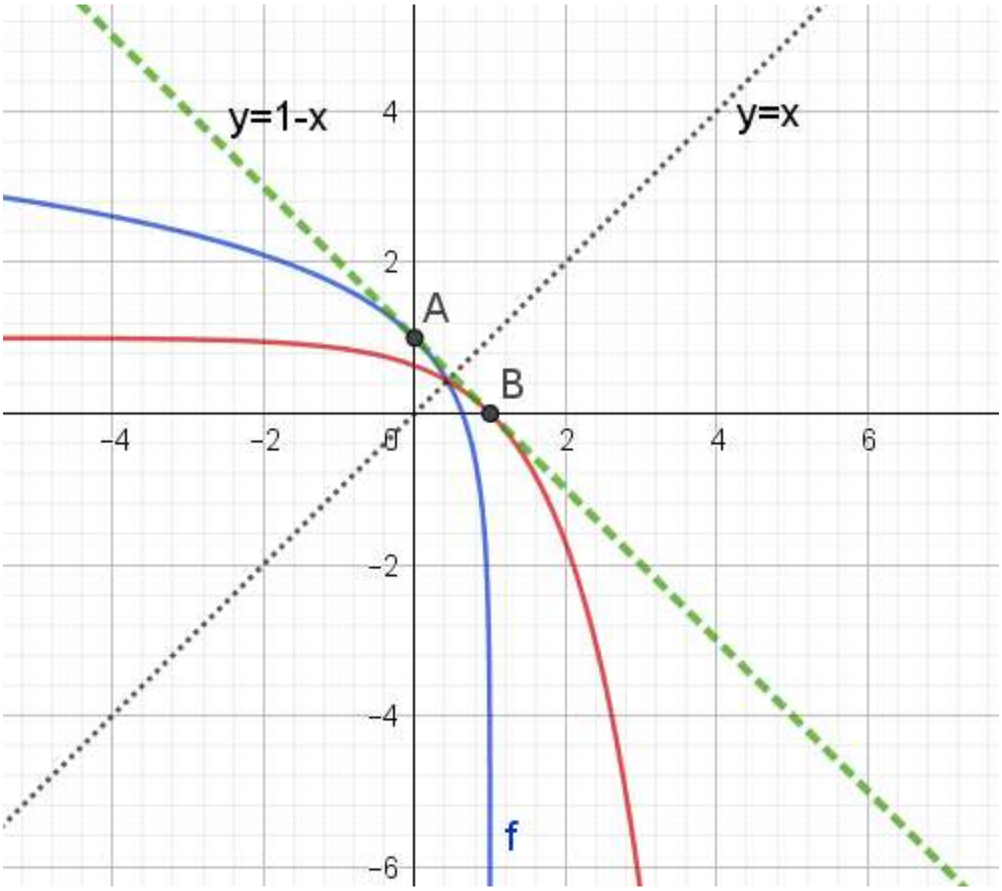
ε : $y - 1 = f'(0)x \Leftrightarrow y = 1 - x$, γιατί $f'(0) = \frac{1}{0-1} = -1$

Αρκεί να δείξω ότι αυτή , η (ε) , εφάπτεται στην $f^{-1}(x)$.

Αρκεί,

$$\begin{cases} f^{-1}(x_o) = 1 - x_o \\ (f^{-1})'(x_o) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{x_o - 1} = 1 - x_o \\ -e^{x_o - 1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_o - 1} = x_o \\ x_o = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_o = 1$$

Συνεπώς η (ε) εφάπτεται της $f^{-1}(x)$ στο (1,0)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κάνω συζυγή παράσταση.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 + \alpha x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha x + 5} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x \cdot (\alpha + \frac{5}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1)} = \frac{\alpha}{2}$$

Συνεπώς $\frac{\alpha}{2} = -2 \Leftrightarrow \alpha = -4$

Άρα $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, $x \in R$

Γ2. $K = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)-xf(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)\cdot(f(x)-x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [\frac{f(x)}{x}\cdot(f(x)-x)]$ (*)

Αρκεί να βρω το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, εύκολα προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Συνεπώς από (*) είναι Κ = 1·(-2) = -2.

Γ3. $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$, παραγωγίσιμη στο R και

$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in R$

- Για κάθε $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$
- Για κάθε $x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$
- Το σημείο (2, f(2)) είναι ολικό ελάχιστο της f(x) με τιμή f(2) = 1

Αν $\Delta_1 = (-\infty,2]$, $f(\Delta_1) = [f(2), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)) = [1,+\infty)$ και το e ανήκει στο $f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,2)$ τέτοιο ώστε η εξίσωση f(x) =e να έχει μοναδική ρίζα.

Αν $\Delta_2 = [2,+\infty)$, $f(\Delta_2) = [f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [1,+\infty)$ και το e ανήκει στο $f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in(2,+\infty)$ τέτοιο ώστε η εξίσωση f(x) =e να έχει μοναδική ρίζα.

Γ4. Θεωρώ τη συνάρτηση $\rho(x) = e^x\cdot(f(x)-e)$, $x\in[x_1, x_2]$

- Είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πράξεις συνεχών
- Είναι παραγωγίσιμη (x_1, x_2),
- $\rho(x_1) = \rho(x_2) = 0$

Άρα από Θ. Ρολ , υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (x_1, x_2)$

Τέτοιο ώστε $\rho'(x_o) = 0$ (**)

Είναι $\rho'(x) = e^x\cdot(f(x)-e) + e^x\cdot f'(x) = e^x\cdot(f(x)+f'(x)-e)$

Άρα από (**) $\rho'(x_o) = 0 \Rightarrow e^{x_o}(f(x_o)+f'(x_o)-e) = 0 \Rightarrow f'(x_o) + f(x_o) = e$

Γ5. Είναι $M(x(t), y(t))$ ή $M(x(t), \sqrt{x^2(t)-4x(t)+5})$, $x'(t) > 0$, $x(t)\geq 2$ και

$y(t) > 0$ για κάθε t.

Ζητείται να βρεθεί το σημείο της f για το οποίο ισχύει :

$y'(t) = \frac{x'(t)}{y(t)} \Rightarrow y'(t)y(t) = x'(t) \Rightarrow 2y'(t)y(t) = 2x'(t) \Rightarrow (y^2(t))' = (2\cdot x(t))' \Rightarrow$

$(x^2(t)-4x(t) + 5)' = 2x'(t) \Rightarrow 2x(t)x'(t) - 4x'(t) = 2x'(t) \Rightarrow$

$2x'(t)\cdot(x(t) - 3) = 0 \Rightarrow x(t) = 3$, συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $(3,\sqrt{2})$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Η ζητούμενη ευθεία είναι η (ε) $y - f(0) = f\,'(0)\cdot x$

Αρκεί να βρω το $f(0)$ και το $f\,'(0)$.

Είναι $e^x \geq x + 1$, και το «=» ισχύει για $x = 0$

Άρα $e^{x-1} \geq x$ και το «=» ισχύει για $x - 1 = 0$ ή $x = 1$.

Συνεπώς $e^{f(0)-1} = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1.$

$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in R$,

- άρα ολικό ελάχιστο της $f(x)$ το σημείο (0,1) .
- Το 0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $f(x)$ και
- η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0

άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Φερμά , συνεπώς $f'(0) = 0$

Άρα η (ε) είναι η $y - f(0) = f\,'(0)\cdot x \Leftrightarrow y = 1$

Δ2.

Η $f(x)$ είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη άρα η $f\,''(x)$ είναι συνεχής και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ άρα διατηρεί πρόσημο.

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο [0,1] για την $f\,'(x)$.

- Η $f'(x)$ συνεχής στο [0,1] ως παραγωγίσιμη
- Η $f\,'(x)$ παραγωγίσιμη (υπάρχει η δεύτερη παράγωγος) στο (0,1)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f\,''(x_0) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1-0} = f'(1) > 0$, άρα η $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R \Rightarrow f\,'(x)$ γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3.

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Το σημείο (0,1) είναι ολικό ελάχιστο της f(x).

Δ4. $e^{f'(f(x)-1)} = 1$, $x \in R \Leftrightarrow f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)-1) = f'(0)$ και

η $f'(x)$ «1-1» , άρα $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Γιατί $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in R$, το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

Δ5. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στα [x , x+1] και [x+1, x+2] για την f(x) , $x \in R$.

Η f(x) είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σε καθένα απ τα παραπάνω διαστήματα.

Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στα (x, x+1) και (x+1, x+2)

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$

Ώστε να ισχύουν : $f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$ και

$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2-x-1} = f(x+2) - f(x+1)$

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ μιας και η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R,

$2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$ για κάθε $x \in R$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου

Msc μαθηματικού ΓΕΛ

Καλή Συνέχεια σε όλους σας.