



U **blog - site**



2019

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

sites – blogs

μμ

():

blogs.sch.gr/iordaniskos/
μ :

blogs.sch.gr/pavtryfon/
μ :

eisatopon.blogspot.gr/
μ : μ

evripidis.freebsdgr.org/ μ :
μ

lisari.blogspot.gr/
μ :

perikentro.blogspot.gr/
μ :

thanasiskopadis.blogspot.com/
μ :

www.askisiologio.gr /
μ :

www.askisopolis.gr /
μ :

μ μ

www.mathink.gr/
μ : μ

: 3

μ μ :

12/5/2019

: 1



***αφιερωμένο** στους υπεύθυνους εκπαιδευτικούς*

που προσπαθούν, ενημερώνονται και αναζητούν καθημερινά υλικό

σε διαδικτυακούς τόπους (sites – blogs – forum – Facebook)

*για να γίνουν **καλύτεροι!***

Εισαγωγή

Όταν ενώνονται 10 μαθηματικά sites – blogs και μόνο αυτό είναι γεγονός! Ένα δείγμα πολιτισμού, παιδείας και ένδειξης ότι τα μαθηματικά είναι πιο πάνω από ονόματα και link! Η **Summa – Union** είναι μια μάζωξη, μια ένωση μαθηματικών sites που αυθόρμητα αποφάσισαν να ενώσουν τις δυνάμεις τους και να αναρτήσουν από κοινού ένα διαγώνισμα προσομοίωσης για τους μαθητές της Γ Λυκείου. Στη **Union** θα βρείτε μόνο μαθηματικούς που υπηρετούν το μεράκι τους και αναζητούν νέους τρόπους προσέγγισης των μαθητών.

Οποιαδήποτε ερώτηση, ένσταση ή σημείωση θέλετε να καταθέσετε μπορείτε να το κάνετε στα email των αντιστοίχων site-blogs.

«Η ισχύς εν τη ενώσει»

Αίσωπος, 620-560 π.Χ.

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ ισχύει ότι, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν για την f δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε για κάθε αριθμό c μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = c$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

ε) Για κάθε συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συνεχείς στο \mathbb{R} συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x - \alpha, & x < 1 \\ -x + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) και $h(x) = x^2 - 3x + 2$.

Αν $g(x) = (f + h)(x)$, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι: $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_g που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Σumma – Union 2019

B4. Αν G αρχική της g στο \mathbb{R} με $G(2) = -\frac{1}{3}$, να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:

- $g(x) = xf(x) - x^8 - x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $xf''(x) + 2f'(x) = 56x^6 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = -1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- α)** η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.
- β)** $f(x) = x^7 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4 + 2

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

- β)** Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} .

Μονάδες 3 + 3

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x(t), y(t))$, κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Τη χρονική στιγμή t_0 που το M περνάει από το σημείο $A(1,1)$ η τεταμένη του x αυξάνει με ρυθμό $x'(t_0) = 2$ μονάδες/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\ell = (OM)$, όπου O η αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $h^7(x) + e^{6x}h(x) = 129e^{7x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $h(x) = ce^x, c \in (1,2)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + v}}$ όπου v θετικός ακέραιος αριθμός. Αν

ισχύει: $\int_0^1 xf'(x) dx = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{v+1}}$, τότε να αποδείξετε ότι:

Δ1. $v = 1$

Μονάδες 7

Δ2. i) $f(\mathbb{R}) = (-1,1)$ **ii)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-f(x)) \cdot f(\eta\mu x)] = 0$

Μονάδες 3 + 3

Δ3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{F^3(\epsilon\phi x)} \cdot e^{\eta\mu x} dx = \frac{4 - \sqrt{e}}{4}$, όπου F παράγουσα συνάρτηση της f στο \mathbb{R} με $F(0) = 1$.

Μονάδες 6

Δ4. η εξίσωση $(4x^3 - 4x^2 - 3x + 5)f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 6