ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

1ο Θέμα

Α. Να αποδείξετε ότι : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,z_1,z_2 μιγαδικοί αριθμοί.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,όπου z_1,z_2 μιγαδικοί αριθμοί.

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ, αν είναι σωστές ή με το γράμμα Λ , αν είναι λανθασμένες.

α)Ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w)$, $z, w \in C$.

β) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |\overline{z}|$.

γ) Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει άπειρες λύσεις.

δ) Ο αριθμός $|z - w|$ παριστάνει την απόσταση των εικόνων των αριθμών z, w στο μιγαδικό επίπεδο.

ε) Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

Μονάδες 10

2ο Θέμα

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:
$|iz - 1| + |i\overline{z} + 1| = 4$ και $w = 3 + 3i$.

i)Να δείξετε ότι οι μιγαδικοί z κινούνται σε κύκλο κέντρου Κ(0,-1) και ακτίνας ρ=2

Μονάδες 7

ii) Αν z_1, z_2, z_3 τρείς από τους παραπάνω μιγαδικούς z,να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2 + z_3 + 3i| = \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + 2i(z_1 + z_2 + z_3) - 3|}{2}$$

Μονάδες 6

iii)Να δείξετε ότι $3 \leq |z - w| \leq 7$

Μονάδες 6

iv)Να δείξετε ότι : $3 \leq |z + w + 2i| \leq 7$

Μονάδες 6

3ο Θέμα

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -2$ Μονάδες 5

ii. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = 2\sqrt{3}$. Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ Μονάδες 5

ii) $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 5

4ο Θέμα

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $w = a + \beta i$ και $z = \dfrac{1-\overline{w}}{1+\overline{w}}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z - w \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι z=w.

Μονάδες 9

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ) Αν ο αριθμός w^2 είναι φανταστικός και α·β>0, να δειχθεί ότι $\left(w+1+i\right)^{2014} + \left(\overline{w}+1-i\right)^{2014} = 0$

Μονάδες 10