Κριτήριο αξιολόγησης στη μονοτονία τα ακρότατα τη κυρτότητα και τις ασύμπτωτες συνάρτησης

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………………………………………….

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2(2\ln x-5),\ x>0$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι για κάθε x > e ισχύει ότι

$$\ln x>\left(\frac{e}{x}\right)^2-4\frac{e}{x}+5.$$

3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.

4. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ασύμπτωτες.

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\lambda x^3-\lambda x^2-6x+1,\ x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι λ = - 2.

6. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύσεις

1. Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=2x(2\ln x-5)+x^2\cdot\dfrac{2}{x}=2x(2\ln x-5)+2x=4x(\ln x-2)$ και

$f''(x)=4(\ln x-2)+4x\cdot\dfrac{1}{x}=4\ln x-4$.

$f''(x)\ge 0\Leftrightarrow 4\ln x-4\ge 0\Leftrightarrow 4\ln x\ge 4\Leftrightarrow \ln x\ge 1\Leftrightarrow x\ge e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(o,e]$ και κυρτή στο $[e,+\infty)$. Είναι $f(e)=e^2(2-5)=-3e^2$.

Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(e,-3e^2\right)$.

2. Είναι $f(e)=-3e^2$ και $f'(e)=4e(1-2)=-4e$.

Για κάθε x > e είναι $\ln x>\left(\dfrac{e}{x}\right)^2-4\dfrac{e}{x}+5\Leftrightarrow \ln x-5>\dfrac{e^2}{x^2}-\dfrac{4e}{x}\overset{\cdot x^2}{\Leftrightarrow} x^2(\ln x-5)>e^2-4ex\Leftrightarrow f(x)>-4ex+e^2$

Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y+3e^2=-4ex+4e^2\Leftrightarrow y=-4ex+e^2$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[e,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε x > e ισχύει $f(x)>-4ex+e^2$.

3. Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 4x(\ln x-2)\ge 0\Leftrightarrow \ln x-2\ge 0\Leftrightarrow \ln x\ge 2\Leftrightarrow x\ge e^2$.

Για κάθε $x\in\left(0,e^2\right)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(e^2,+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(o,e^2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e\ ,+\infty\right)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(e^2\right)=e^4(4-5)=-e^4$.

4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι η x = 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2(2\ln x-5)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x^2\ln x-5x^2\right)=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, οπότε η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(2\ln x-5)=+\infty(+\infty)=+\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}(2\ln x-5)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x\ln x-5x=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

5. $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 0$ (1).

Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x>0$.

Παρατηρούμε ότι $h(1)=f(1)-g(1)=-5-(-5)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x)\le h(1)$ (2).

Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η h έχει μέγιστο στο x = 1. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)-g'(x)=4x(\ln x-2)-\left(3\lambda x^2-2\lambda x-6\right)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $h'(1)=0\Leftrightarrow 4(0-2)-(3\lambda-2\lambda-6)=0\Leftrightarrow -8-\lambda+6=0\Leftrightarrow \lambda=-2$.

6. Είναι $g'(x)=3\lambda x^2-2\lambda x-6$.

Η g ΄είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=4\lambda^2+72\lambda=4\lambda(\lambda+18)$

- Αν Δ> 0 $\Leftrightarrow \lambda<-18$ ή $\lambda>0$ τότε η g ΄έχει 2 ρίζες και αλλάζει πρόσημο γύρω τους, οπότε η g δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν Δ = 0 τότε λ=0 ή λ = -18.

Για λ= 0 είναι $g'(x)=-6<0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$.

Για λ = -18 είναι $g'(x)=-54x^2+36x-6=-6(9x^2-6x+1)=-6(3x-1)^2<0$ για κάθε $x\neq\frac{1}{3}$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\Delta<0 \Leftrightarrow -18<\lambda<0$ τότε $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Τελικά η g είναι γνησίως φθίνουσα για $\lambda\in[-18,0]$, οπότε η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι η λ= 0.