

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2020 - 2021**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 7ο Διαγώνισμα

6-4-2021

## Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

μονάδες 7

**A2.** Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο  $\Delta$  ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

**A4.** Σε μαθητή δόθηκε η παρακάτω πρόταση Σωστού Λάθους με αιτιολόγηση:

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) = g(\alpha)$  και  $f(\beta) = g(\beta)$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε στα σημεία  $A(x_0, f(x_0))$  και  $B(x_0, g(x_0))$  οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες.

Με πρόχειρη σκέψη ο μαθητής απάντησε ψευδής και το αιτιολογεί ως εξής:

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΤ για την  $f$  και την  $g$  στο  $[\alpha, \beta]$  υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  και

$$x_1 \in (\alpha, \beta) : g'(x_1) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ είναι βέβαια } \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ όμως αυτό δεν}$$

εξασφαλίζει ότι τα  $x_0, x_1$  είναι ίσα οπότε δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε στα σημεία  $A(x_0, f(x_0))$  και  $B(x_0, g(x_0))$  οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες.

Να απαντήσετε αν ο μαθητής έχει δίκιο. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 4

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν η ευθεία  $y = \beta$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = +\infty$ .

**β)** Αν  $f''(x) = x^2$ , τότε η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την  $f$ .

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x - \sigma\phi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της.

μονάδες 4

**B2.** Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 2021$ .

μονάδες 7

**B3.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

μονάδες 7

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$  και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f$ .

μονάδες 3+4

### Θέμα Γ

Σε μια καλλιέργεια βακτηριδίων παρατηρήσαμε ότι αρχικά ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους  $N'(t)$  ήταν σταθερός και ίσος με 1 (εκατομμύρια βακτηρίδια ανά ώρα). Η καλλιέργεια αναπτύσσεται ομοιόμορφα πάνω σε μια γυάλινη πλάκα σχήματος κυκλικού δίσκου ακτίνας  $R=64\text{mm}$  ξεκινώντας από το κέντρο.

Μετά από χρόνο  $t_1=1$  ώρες εκτιμήσαμε ότι ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν  $N(1)=10$  (εκατομμύρια) και μετρήσαμε ότι η καλλιέργεια κατελάμβανε μια κυκλική επιφάνεια που είχε ακτίνα  $R_1=8\text{mm}$  με κέντρο το κέντρο της γυάλινης πλάκας.

**Γ1.** Να βρείτε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων καθώς και την επιφάνεια  $E(1)$  που καταλαμβάνουν αυτά τη χρονική στιγμή  $t_1=1$ .

μονάδες 4

Στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός αύξησης έπαψε να είναι σταθερός και προέκυψε ότι το πλήθος των βακτηρίων ακολουθεί την εκθετική μεταβολή  $N(t) = e^{kt} \cdot e^c$  με  $k, c$  σταθερές με  $t \geq 1$ .

Εκτιμήθηκε ότι ο πληθυσμός τετραπλασιάστηκε μια ώρα μετά την  $t_1$ . Δεχόμαστε ακόμη ότι από τη χρονική στιγμή  $t_1$  και μετά η επιφάνεια που καταλαμβάνει η καλλιέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των βακτηριδίων.

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $k=\ln 4$ ,  $e^c = \frac{5}{2}$  και  $N(t) = 10 \cdot 4^{t-1}$ .

μονάδες 6

**Γ3.** Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης  $N(t)$  η οποία θα δίνει τον πληθυσμό των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι και τη χρονική στιγμή  $t=4$ .

μονάδες 2

**Γ4.** Να βρείτε το τύπο που δίνει το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας που καταλαμβάνουν τα βακτηρίδια για  $1 \leq t \leq 4$ .

μονάδες 5

**Γ5.** Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό βακτηριδίων και τον απαιτούμενο χρόνο όταν η καλλιέργεια έχει εξαπλωθεί σε όλη την γυάλινη πλάκα.

μονάδες 4

**Γ6.** Την χρονική στιγμή  $t=4$  αρχίζει να ενεργεί η κολπικίνη, μια ουσία η οποία σταματάει την αύξηση των βακτηριδίων και τα εξολοθρεύει μειώνοντας το πλήθος τους με ρυθμό

$N'(t) = -12,8(t-4)$ ,  $t \geq 4$ . Να βρείτε από πια χρονική στιγμή και μετά δεν θα υπάρχουν βακτηρίδια.

μονάδες 4

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}$ .

**Δ1.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

**Δ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα της  $f$  είναι ακρότατα της  $f$ .

μονάδες 4

**Δ3.** Να βρεθεί η ευθεία, η οποία ανήκει στις ευθείες:  $Ax + By + 2B - A = 0$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \neq 2B$  και απέχει την μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 7

**Δ4.** Να δείξετε ότι:

**α)** η  $f$  είναι κοίλη για  $x \geq 2$

**β)** υπάρχει μία ακριβώς εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , παράλληλη στην ευθεία

$y = \frac{1}{2}x + 2021$ , σε σημείο της με τετμημένη μεγαλύτερη ή ίση του 2.

μονάδες 3+5

Καλή Τύχη!

Askisopolis