

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2020 - 2021**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 2ο Διαγώνισμα

2-3-2021

## Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α,β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

μονάδες 7

**A2.** Αν δύο μεταβλητά μεγέθη συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$  ;

μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$  τότε πάντοτε είναι  $f \circ g = g \circ f$ ».

- α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;  
**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ορίζεται η δεύτερη παράγωγος στο σημείο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[α,β]$  και  $f(α) = f(β)$  τότε υπάρχει σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (α,β)$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
- γ)** Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.
- δ)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού τους, τότε και η  $g \circ f$  είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
- ε)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$ , είναι διάστημα.

## Θέμα Β

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x}, & x < 1 \\ 3x + 2, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 4x - 4, & x \geq 2 \end{cases}.$$

**B1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

μονάδες 5

**B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[1, 2]$ .

μονάδες 4

**B3.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

μονάδες 5

**B4.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = f(x)$ ,  $x \geq 2$ .

**α)** Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

μονάδες 5

**β)** Να βρείτε τον τύπο της  $g^{-1}$ .

μονάδες 5

### Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\eta\chi$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  και  $g(x) = \frac{2\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Γ1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι  $f(x) < g(x)$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι  $e\phi x + \sqrt{x} > x$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των εφαπτομένων της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

μονάδες 7

### Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

- $f(x) \geq e^x - x^2 - \lambda x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f'(0) = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 0$ . Στη συνέχεια αν γνωρίζετε ότι  $f(x) \leq e^x - x^2 - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ .

μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 5

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση  $e^x < x^2 + 1$  και να κάνετε γεωμετρική ερμηνεία της ανίσωσης δίνοντας κατάλληλο σχήμα.

μονάδες 3

Δ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x = 1$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$\frac{(x-1)^2}{e^{x-1} - x} < e \text{ για κάθε } x > 1.$$

μονάδες 3

Δ5. Να βρείτε το σημείο της  $C_f$  με τετμημένη στο  $[1, +\infty)$  που έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία  $\varepsilon: y = (e-2)x - 1$ . Ποια είναι αυτή η απόσταση;

μονάδες 5

Δ6. α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) > (e-2)x - 1$  για κάθε  $x \in [0, 1)$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $\varepsilon$  τέμνει την  $C_f$ .

μονάδες 5

Καλή Τύχη!