2ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2020-2021 (25-5-2021)

ΟΝΑΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ …….

ΤΜΗΜΑ ……

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f ’(x) > 0 στο (α, x_0) και f ’(x) < 0 στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f.

(Μονάδες 7)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 2+2=4)

Α3. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

(Μονάδες 4)

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 3)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2020, 2021], παραγωγίσιμη στο (2020, 2021) και f ‘(x) ≠0 για κάθε x ∈ (2020, 2021) τότε f(2020) ≠ f(2021).

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση, στο πεδίο ορισμού της,, διατηρεί πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.

γ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

(Μονάδες 6)

Askisopolis

ΘΕΜΑ Β.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^2-1$

Β1. Να δείξετε ότι $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2-1}$ με $\chi\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ (Μονάδες 5)

Β2. Αν $h(x)=f\circ g$ να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τη κυρτότητα. (Μονάδες9)

Β3. Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική παράσταση της h.

(Μονάδες6)

Β4. Αν κ(χ)= $\sqrt{x^2-1}$ με $\chi\geq 1$ να δείξετε ότι η κ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (Μονάδες5)

Askisopolis

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι

$f'(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}$ για κάθε χ>0.

Γ1. Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει:
$x(f(x)+a)=x^2-2x+1-x\ln^2 x$, για κάθε χ>0. (Μονάδες5)

Αν $f(1)=0$

Γ2. Δείξτε ότι: $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x}-\ln^2 x$ (Μονάδες2)

Γ3. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$. (Μονάδες6)

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι για κάθε χ, ψ θετικό ισχύει: $\dfrac{(x-\psi)^2}{x\psi}\geq \ln^2\dfrac{x}{\psi}$ (Μονάδες7)

Γ5. Για τις διάφορες τιμές του $\beta\in\Re$ να βρεθεί το πλήθος των ριζών της

f(x)= $\beta^2-5\beta+6$ (Μονάδες5)

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,4]\to\Re$ με σύνολο τιμών το $[-2,2]$,με $f(2)=\frac{1}{2}$ και $f(4)=1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+2f(x)$ με $x\in[2,4]$.

Δ1. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες3)

Δ2. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{2f(2)+f(3)+f(4)}{4}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα (Μονάδες5)

Δ3. Δείξτε ότι η f΄ παίρνει τη τιμή 0,25 και η g΄ τη τιμή $\frac{e-\sqrt{e}+1}{2}$ (Μονάδες6)

Δ4. Δείξτε ότι οι ευθείες ψ=2 και ψ=-2 εφάπτονται της συνάρτησης f. (Μονάδες6)

Δ5. Υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)=0$ (Μονάδες5)

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΗ ΖΩΗ ΣΑΣ.

Askisopolis

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

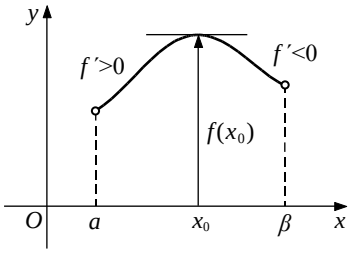
ΘΕΜΑ Α

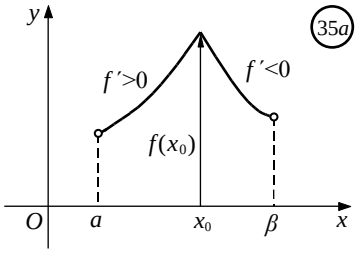
Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστό της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Asklsopolis

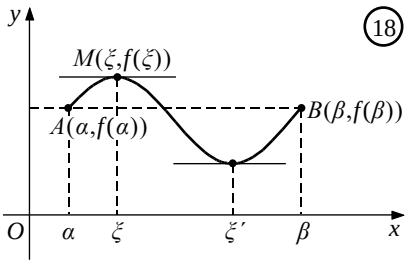
Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.



Α3. Έστω μία συνάρτηση *f συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*..

Α4. Ψ

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$ **Είναι** $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-5x^2+6x)=0$ **και** $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ οπότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του πηλίκου. Όμως $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-3)}{(x+2)}=-\dfrac{1}{2}$

Α5. Α (Διαφορετικά θα ίσχυε Rolle)

Ψ (Μπορεί το πεδίο ορισμού να είναι ένωση διαστημάτων)

Α (εφχ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_f=[0,+\infty)$, $A_g=\Re$ τότε $A_{f\circ g}=\{x\in Ag: g(x)\in Af\}=\{x\in\Re: x^2-1\geq 0\}$ $=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2-1}$

Β2. Η *h* είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ παραγωγίσιμη με $h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και συνεπώς έχει τοπικό ελάχιστο για χ=-1 και για χ=1 το f(1)=0 που είναι και ολικό αφού $\sqrt{x^2-1}\geq 0$

Στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ η h′ είναι παραγωγίσιμη με $h''(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$ <0 οπότε η h στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

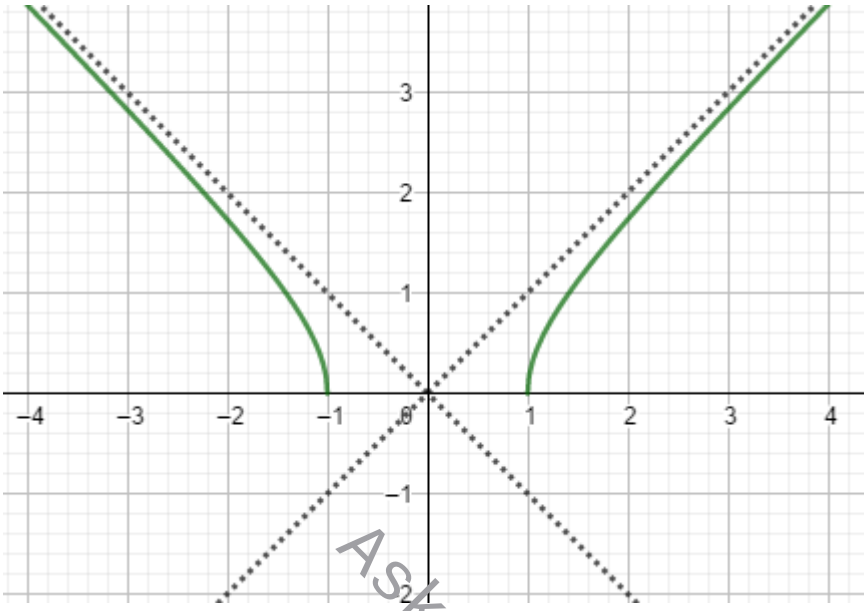
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{-1}{x(-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1)})=0$ άρα η ψ=-χ πλάγια

ASKLSOPOLIS

ασύμπτωτη στο $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x})=0$ άρα η ψ=χ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$



Askisoon.gr

Β4. Η k είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και στο $(1,+\infty)$ παραγωγίσιμη με $k'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ συνεπώς η k είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη και επειδή είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το [k(1), $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)$) = $[0,+\infty)$= Af^{-1} οπότε για $x\geq 1$ και $\psi\geq 0$ θα έχουμε ψ=k(x) $\Leftrightarrow \psi=\sqrt{x^2-1} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} \psi^2+1=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{\psi^2+1}$

ΘΕΜΑ Γ

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\alpha\in\Re$: $x(f(x)+a)=x^2-2x+1-x\ln^2 x$

$\Leftrightarrow f(x)+a=x-2+\frac{1}{x}-\ln^2 x \Leftrightarrow a=x-2+\frac{1}{x}-\ln^2 x-f(x)$, για κάθε χ>0.

Γ1. Αν $k(x)=x-2+\frac{1}{\chi}-\ln^2 x-f(x)$ με x>0 τότε $k'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}-f'(x)$

$\Leftrightarrow k'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}-1+\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow k'(x)=0$ και συνεπώς η κ είναι σταθερή

οπότε υπάρχει σταθερός αριθμός α ώστε $k(x)=\alpha\Leftrightarrow a=x-2+\frac{1}{\chi}-\ln^2 x-f(x)$

Γ2. Από το 1ο ερώτημα για χ=1 το α=0 και άρα $f(x)=x-2+\frac{1}{x}-\ln^2 x$

Γ3. Είναι $f'(x)=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}$ οπότε θέτοντας $l(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$ με χ>0 έχουμε

$l'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$ και επειδή είναι συνεχής θα είναι γνησίως αύξουσα

οπότε για χ>1 $\Rightarrow$ $l(x)>0$ και για 0<χ<1 $\Rightarrow$ $l(x)<0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και άρα έχει ολικό ελάχιστο για χ=1 το f(1)=0 και άρα $f(x)\geq 0$

Γ4. Στο $A_1=(0,1)$ η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f(A_1)=(\lim_{x\to 1^-}f(x),\lim_{x\to 0^+}f(x))$

$=(0,+\infty)$ αφού $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-2+\frac{1}{x}-\ln^2 x)=+\infty$ με $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\ln^2 x)$

$=\lim_{x\to 0^+}(\frac{1-x\ln^2 x}{x})=+\infty$ αφού $\lim_{x\to 0^+}(x\ln^2 x)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}})\overset{DL}{=}\lim_{x\to 0^+}(-\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{1}{x^2}})$

$=\lim_{x\to 0^+}(-2x\ln x))=\lim_{x\to 0^+}(\frac{-2\ln x}{\frac{1}{x}})\overset{DL}{=}\lim_{x\to 0^+}(\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}})=0$ Στο $A_2=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και

γνησίως αύξουσα με $f(A_2)=[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x))=[0,+\infty)$ αφού

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2+\frac{1}{x}-\ln^2 x)=\lim_{x\to+\infty}(x(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln^2 x}{x}))=+\infty$ εφόσον

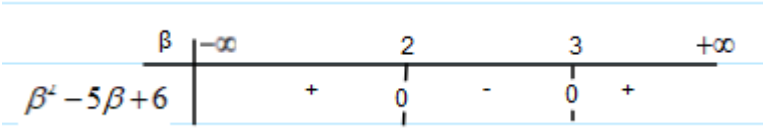
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{DL}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{DL}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$. Συνεπώς f(A)= $f(A_1)\cup f(A_2)=[0,+\infty)$ Επιπλέον

αφού $\frac{x}{\psi}>0$ θα είναι $\frac{(x-\psi)^2}{x\psi}\geq\ln^2\frac{x}{\psi}\Leftrightarrow\frac{(x^2-2x\psi+\psi^2)}{x\psi}\geq\ln^2\frac{x}{\psi}\Leftrightarrow\frac{x}{\psi}-2+\frac{\psi}{x}\geq\ln^2\frac{x}{\psi}$

$\Leftrightarrow f(\frac{x}{\psi})\geq 0$ που ισχύει.

Γ5. $\beta^2-5\beta+6=0\Leftrightarrow$ β=2 ή β=3

AskisopoLis



Οπότε αν β=2 ή β=3 έχει μοναδική λύση την χ=1. Για 2<β<3 είναι αδύνατη και για $\beta\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις μια στο A_1 και μία στο A_2 όπου είναι γνησίως φθίνουσα και αύξουσα αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f αφού έχει σύνολο τιμών το [-2,2] έχει μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2. Αν η f ήταν γνησίως μονότονη στο [2,4] τότε τα ακρότατα θα ήταν στα άκρα του πεδίου ορισμού της άτοπο

Δ2. $f(x)=\dfrac{2f(2)+f(3)+f(4)}{4}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1+f(3)+1}{4}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2+f(3)}{4}$ όμως $-2\le f(3)\le 2\Leftrightarrow 0\le f(3)+2\le 4\Leftrightarrow 0\le\dfrac{f(3)+2}{4}\le 1$ και επειδή ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης η f θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Δ3. ΘΜΤ για την f στο [2,4] υπάρχει $\alpha\in(2,4)$: $f'(a)=\dfrac{f(4)-f(2)}{2}=\dfrac{1}{4}=0,25$

ΘΜΤ για την g στο [2,4] υπάρχει $\beta\in(2,4)$: $g'(\beta)=\dfrac{g(4)-g(2)}{2}$ όμως g(4)=e+2 και g(2)= $\sqrt{e}+1$ οπότε $g'(\beta)=\dfrac{e-\sqrt{e}+1}{2}$

Δ4. Η f έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 και επειδή δεν προκύπτουν από τις τιμές στα άκρα του πεδίου ορισμού της θα υπάρχουν γ, δ εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου αυτά παρουσιάζονται οπότε από θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\gamma)=0$ και $f'(\delta)=0$ και αν στο γ παρουσιάζεται το ελάχιστο και στο δ το μέγιστο (Η f δεν είναι σταθερή) τότε το $f(\gamma)=-2$ και $f(\delta)=2$ τότε η εφαπτομένη στο γ είναι η ψ=-2 και στο δ η ψ=2.

Δ5. Α τρόπος. Επειδή η f δεν είναι σταθερή το $\gamma\neq\delta$ και έστω γ<δ. Όμως $g'(x)=e^{f(x)}.f'(x)+2f'(x)$ τότε η g' είναι συνεχής στο [γ,δ] παραγωγίσιμη στο (γ,δ) και $g'(\gamma)=g'(\delta)$ από Θ Rolle στο [γ,δ] θα υπάρχει ρίζα της g'' δηλαδή υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)=0$.

Β τρόπος. Από τις εξισώσεις των εφαπτομένων υπάρχουν σημεία με τετμημένες γ, δ και έστω γ<δ με παράγωγο μηδέν. Οπότε όπως στο προηγούμενο τρόπο από θεώρημα Rolle.

Askisopolis