5.3. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

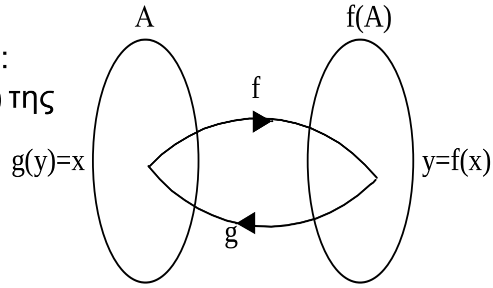
Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι ‘1-1’ τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f υπάρχει **μοναδικό στοιχείο** του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$,για το οποίο ισχύει :
$f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι :

- Έχει **πεδίο ορισμού** το **σύνολο τιμών** $f(A)$ της f
- Έχει **σύνολο τιμών** το **πεδίο ορισμού** A της f και
- Ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$



Αυτό σημαίνει ότι αν η f αντιστοιχίζει το x στο y τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως.

Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.Επομένως έχουμε :

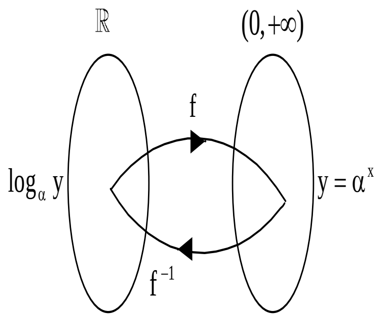
$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

Παρατήρηση :

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία που **διχοτομεί** τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

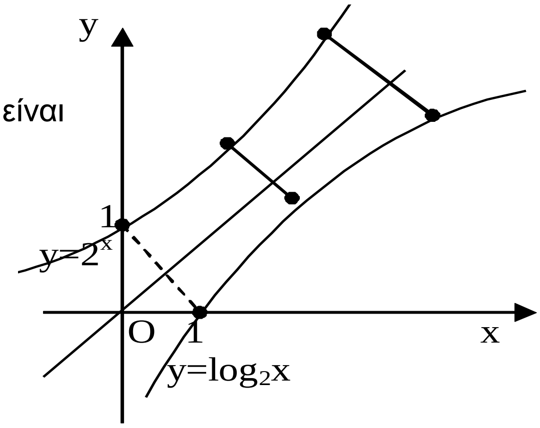
Λογαριθμική συνάρτηση

Η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ είναι η συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, που λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** ως προς τη βάση α.



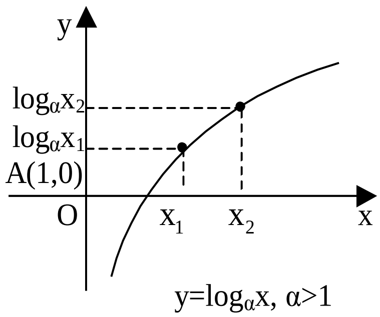
Παρατήρηση :

Επειδή λοιπόν η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_{\alpha}x$ είναι **αντίστροφη** της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^{x}$ οι γραφικές τους παραστάσεις είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία που **διχοτομεί** τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



$\Rightarrow$ Αν α>1, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_{\alpha}x$:

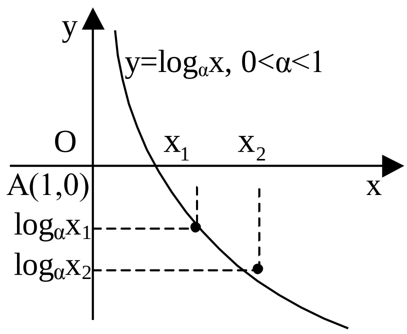
- Έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα $(0,+\infty)$
- Έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως αύξουσα** ,που σημαίνει ότι : αν $x_1<x_2$,τότε $\log_{\alpha}x_1<\log_{\alpha}x_2$, απ' όπου προκύπτει ότι $\log_{\alpha}x<0,$ αν 0<x<1 και $\log_{\alpha}x>0,$ αν x>1.



- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy'.

$\Rightarrow$ Αν 0<α<1 τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_{\alpha}x$:

- Έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα $(0,+\infty)$
- Έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** ,που σημαίνει ότι : αν $x_1<x_2$,τότε $\log_{\alpha}x_1>\log_{\alpha}x_2$, απ'



- όπου προκύπτει ότι $\log_{\alpha}x>0,$ αν 0<x<1 και $\log_{\alpha}x<0,$ αν x>1.
- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Η λογαριθμική συνάρτηση ως αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης είναι συνάρτηση 1-1 δηλαδή αν $\log_{\alpha}x_1=\log_{\alpha}x_2$,τότε $x_1=x_2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. Έστω μια συνάρτηση f με τύπο της μορφής:

$$f(x) = \ln\varphi(x) \quad (\text{ή της μορφής } f(x) = \log\varphi(x))$$

Τότε:

α) Για να βρούμε το πεδίο ορισμού Α της $f(x)$ λύνουμε την ανίσωση $\varphi(x) > 0$.

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Ας προσέξουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 1$.

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω (αντίστοιχα κάτω) από τον άξονα x΄x, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$ αντίστοιχα).

Ας παρατηρήσουμε ότι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 1 \quad \text{και} \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi(x) < 1$$

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση $g(x) = \log\varphi(x)$.

Β. Ακριβώς όμοια εργαζόμαστε και στην περίπτωση που $f(x) = \log\varphi(x)$.

Αξίζει να τονίσουμε τον τρόπο λύσης δύο βασικών εξισώσεων:

α)

- $$\log\varphi(x) = \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 10^{\omega(x)} \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

- $$\ln\varphi(x) = \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = e^{\omega(x)} \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

β)

- $$10^{\varphi(x)} = \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = \log\omega(x) \\ \omega(x) > 0 \end{cases}$$

- $$e^{\varphi(x)} = \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = \ln\omega(x) \\ \omega(x) > 0 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η πρώτη και σημαντικότερη ενέργεια σε κάθε λογαριθμική εξίσωση είναι να θέσου- με τους απαραίτητους περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε όρο της μορφής $\log_\alpha A(x)$ απαιτούμε $A(x) > 0$.

Οι σημαντικότερες μέθοδοι – τεχνικές για την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων συνίστανται στις παρακάτω ενέργειες:

α) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του λογαρίθμου.

β) Προσπαθούμε με αντίστροφη εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων να απαλλάξουμε την εξίσωση από τους λογάριθμους.

γ) Βασιζόμαστε στην ιδιότητα $\alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$, $\theta > 0$.

δ) Παίρνουμε λογαρίθμους και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Αυτό συνήθως το επιχειρούμε όταν οι όροι της εξίσωσης είναι γινόμενα, πηλίκα και δυνάμεις.

ε) Χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής. Δημιουργούμε δηλαδή, πιθανόν ύστερα από εφαρμογή κάποιων ιδιοτήτων, έναν όρο, του οποίου συνάρτηση είναι και τα δύο μέλη της εξίσωσης. Τον όρο αυτό θέτουμε y και καταλήγουμε σε αλγεβρική εξίσωση. Η μέθοδος αυτή λέγεται και “**αλγεβρική μέθοδος”**.

στ) Κάνουμε αλλαγή βάσης. Αν λοιπόν οι παρουσιαζόμενες (διαφορετικές) βάσεις δεν επιτρέπουν την απλοποίηση της εξίσωσης, τότε εκφράζουμε όλους τους λογαρίθμους ως προς κάποια κατάλληλη βάση (πιθανόν και ως κάποια βάση που ήδη παρουσιάζεται στην άσκηση).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

α) Για τη λύση λογαριθμικών ανισώσεων ακολουθούμε σε βασικές γραμμές την πορεία λύσης που γνωρίσαμε στις λογαριθμικές εξισώσεις. Η πρώτη σημαντική διαφορά είναι ότι:

♦ δεν απαλείφουμε τους παρονομαστές, αν αυτοί περιέχουν τη μεταβλητή, πριν μελετήσουμε το πρόσημό τους,

♦ δεν πολλαπλασιάζουμε, ούτε διαιρούμε με μεταβλητές ποσότητες, αν δεν βεβαιωθούμε πρώτα για το πρόσημό τους.

β) Οι βασικότερες μορφές λογαριθμικών ανισώσεων είναι ίδιες με αυτές που προ-κύπτουν από λογαριθμικές εξισώσεις αντικαθιστώντας το σύμβολο (=) της ισότητας με τα ανισοτικά σύμβολα (<) και (>) ή (≤), (≥). Πριν περάσουμε στα βασικά θέματα, υπενθυμίζουμε ότι για τη λύση ανισώσεων της μορφής $\log_\alpha\varphi(x) > 0$ (< 0) διακρίνουμε περιπτώσεις:

i. αν $\alpha > 1$, τότε:

♦ $\log_\alpha\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 1$ ♦ $\log_\alpha\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi(x) < 1$

ii. αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

♦ $\log_\alpha\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi(x) < 1$ ♦ $\log_\alpha\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 1$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων οι λογαριθμικές ανισώσεις οδηγούνται σε αλγεβρικές ανισώσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για την επίλυση λογαριθμικών συστημάτων εφαρμόζουμε τα παρακάτω:

♦ Θέτουμε τους απαραίτητους περιορισμούς για τους αγνώστους του συστήματος.

♦ Προσπαθούμε να μετατρέψουμε το σύστημα σε αλγεβρικό, απαλλάσσοντας την κάθε εξίσωση του συστήματος από τους λογαρίθμους.

♦ Λογαριθμίζουμε ενδεχομένως τη μία εξίσωση (αν περιέχει γινόμενα και δυνάμεις) και εισάγουμε νέες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι θέτουμε για παράδειγμα $\log x = \varphi$ και $\log y = \omega$, οπότε το σύστημα μετατρέπεται σε αλγεβρικό.

♦ Πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε ανάλογα (όλες ή ορισμένες από) τις εξισώσεις του συστήματος, ώστε να προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

♦ Εφαρμόζουμε οποιοδήποτε αλγεβρικό τέχνασμα, το οποίο οδηγεί σε απλούστερες εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ΟΜΑΔΑ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\log_x \frac{x+1}{2-x}$ ιι) $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

ιιι) $f(x)=\frac{\log(x^2-8x+15)}{\sqrt{16-x^2}}$ ιv) $f(x)=\log_2 \frac{x-1}{2-x}$

2. Να συγκριθούν μεταξύ τους οι αριθμοί:

i) $\log_5 3$ και $\log_5 \frac{1}{3}$ ii) $\log_{\frac{1}{2}} 7$ και $\log_{\frac{1}{2}} 11$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x)=\log\ x$, $g(x)=\log\ x-2$ και $h(x)=\log\ (x+1)$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log(x-2)^2=2\log 4$ ii) $\log(x-6)+\log(x-7)=1-\log 5$

iii) $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2$ iv) $2\log x-\log 4=\log(x-1)-\log 3$

v) $\log(35-x^3)=3\log(5-x)$ vi) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$

vii) $\log(2x-5)+\log(3x+7)=4\log 2$ viii) $\ln(x^3+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1)=\ln 3$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$ ii) $\log(4^{x-2}+9)-\log(2^{x-2}+1)=1-\log 2$

iii) $\log\left(21^{\log x+1}-42\right)+\log 4=\log 21\cdot\log x+\log 76$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{1}{2}\log(3x-1)+\frac{1}{2}\log(8x-2)=\log(4x-1)$

ii) $\frac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$ iii) $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=0{,}5$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{3+\log x}{3-\log x}+\frac{2+\log x}{2-\log x}=5$ ii) $\frac{\log x+3}{\log x}+\frac{\log x-2}{\log x-3}=\frac{9}{2}$

iii) $1+\frac{\log(x-1)}{\log 2}=\frac{2\log 2}{\log(x-1)}$ iv) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$

v) $\log\sqrt{x}+\sqrt{\log x}=\log x$ vi) $(\log x^3)^2-2\log x^2-5=0$.

8. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) log(2x-3)>log(24-6x)

ii) ln(2x-1)>ln(3-x)

iii) log(4-x^2)<log(-3x)

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) log(x^2 – 5x + 7) < 0 ii) $\log\left[\log(x^2-7x+22)\right]<0$

10. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \log x+\log y=\dfrac{3}{2} \\ \log x-\log y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \log^2 x+\log^2 y=10 \\ \log x-\log y=2 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \log x+2\log y=6 \\ \log x-\log y=3 \end{cases}$

Β΄ΟΜΑΔΑ

11. Δίνεται η $f(x)=\ln\left[(\lambda-1)x^2-2(\lambda+3)x+\lambda\right]$. Να βρείτε το λ ώστε η f να ορίζεται για κάθε $x\in R$.

12. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα με θετικές τιμές. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο ανισωτικό σύμβολο στα κενά:

i) $\log_{1/2} f(3)...\log_{1/2} f(5)$

ii) $\log f(1)...\log f(0)$

iii) $\ln f(e)...\ln f\left(e^2\right)$

iv) $\log_{1/3} f(1)...\log_{1/3} f(0)$

13. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών τους.

i) f(x) = log(x – 1) ii) f(x) = log|x – 2|

iii) f(x) = ln|x| - 1 iv) f(x) = ln(1 – 2x + x^2)

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log\left[\log\left(2x^2+x-11\right)\right]=0$ ii) ln(9^x-3^x-5)=0

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\dfrac{x^{2-\log x}}{10}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ii) $x^{\log x}=\dfrac{1}{10}x^2\sqrt{x}$

iii) $x^{\log\sqrt{x}}=100$ iv) $(100x)^{\log(100x)-2}=1000$

v) $(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}}=100$ vi) $2^{2x}=3^{x+1}$ vii) $10^{2\log x-3}=x$

16. i)Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x}=x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$

17. i) Να αποδείξετε ότι: $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$ αν $0<x\neq 1$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $\alpha^{\log_\beta\gamma}=\gamma^{\log_\beta\alpha}$ με $(0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1)$

18. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\log(x^2+9)>1+\log x$ ii) $\ln(x-1)<1+\ln(x^2-1)$

iii) $\log^2 x-11\cdot\log x+10\leq 0$ iv) $(\log x)^2-5\log x+4\leq 0$

v) $\dfrac{\ln x-1}{\ln x}\leq\dfrac{1}{2}$

19. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $2^{\log(x^2-15x)}\leq 4$ ii) $\ln(5.2^x-6)\geq 2x\ln 2$ iii) $x^{\log x}>10$

20. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^{\log y}=1000 \\ \log(xy)=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \log x+\log y=2 \\ \log(x+y)=2\log 5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \log\left(x^2+y^2\right)=1+\log 13 \\ \log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2 \end{cases}$

21. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2^{\log x}-3^{\log y}=1 \\ 4^{\log x}+9^{\log y}=25 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 5^x-2^y=1 \\ x\log 5+y\log 2=\log 20 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} (3x)^{\log 3}=(5y)^{\log 5} \\ 5^{\log x}=3^{\log y} \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=200 \\ x^{\log y}\cdot y^{\log x}=y^4 \end{cases}$

v) $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y}=2 \\ (x+y)3^x=6^7 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} x+\log y=1 \\ \sqrt[x]{y^2}+10=11\sqrt[x]{y} \end{cases}$

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(x-1)-\log(x^2-2x)$ και $g(x)=1-\log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.

β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $f(x)=0$ και ii. $g(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4)-3g(1)+4=\log 30$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x), x>0, \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10,25)$.

β) Αν α = 1, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\left(\log^2 x+4\log x\right)^2$

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^2(x-2)-f(x)-2=0$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ.

γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του χ για τις οποίες $f(x)<0$.

28. Δίνε Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log(x-1))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$

29. ται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+1+2x=0$.