Test 1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Α2. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή(Σ) ή Λανθασμένη(Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

α. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f

β. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της |f| αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που δεν βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ. Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις *f o g* και *g o f*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

ε. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η h ○ (g ○ f), τότε ορίζεται και η (h ○ g) ○ f και ισχύει h ○ (g ○ f) = (h ○ g) ○ f.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Β3. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln x-1$ και $g(x)=2-e^x$.

Γ1. Να βρείτε τις συναρτήσεις

α. g o f β. f o g

Γ2. Να βρείτε την συνάρτηση $h=\dfrac{f}{g}$.

Γ3. Να βρείτε την σχετική θέση της C_h με τον άξονα x'x .

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)-x+1=0$, για κάθε $x\in R$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x-1}{1+f^2(x)}$.

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Δ3.Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)}-2016=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΛΙΑΤΣΙΟΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.141

Α2.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Θα πρέπει :

$\sqrt{x^2+1}-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq x$ (1)

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\nu o\upsilon\mu\varepsilon$ περιπτώσεις:

I)Αν x $\geq$ 0 τότε η (1) υψώνοντας και τα δυο μέλη στο τετράγωνο γίνεται: $x^2+1 \geq x^2 \Leftrightarrow 1 \geq 0$ ισχύει.

II) Αν x<0 τοτε η (1) προφανώς ισχύει.

$\acute{A}\rho\alpha$ η (1) ισχύει για κάθε x $\in$ R .Επομένως D_f=R .

Β2.

Για να είναι η f περιττή θα πρέπει:

- Για κάθε $x \in R$ και -x $\in$ R , το οποίο ισχύει αφού το $R=(-\infty,\infty)$ είναι συμμετρικό ως προς το 0.
- Ακόμη , θα πρέπει
  $f(-x)=-f(-x) \Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=0 \Leftrightarrow \ln[(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)]=0$
  $\Leftrightarrow \ln(x^2+1-x^2)=0 \Leftrightarrow \ln 1=0$ ισχύει.

Β3.

Άξονας x' x: Λύνω

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}-x)=0 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x+1$ (2)

θα πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Με αυτόν τον περιορισμο και υψώνοντας στο τετράγωνο η (2) γίνεται:

$x^2+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=0 \in R$. Άρα το σημείο τομής της C_f με τον x'x είναι το O(0,0).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x) = 2\ln x - 1$, θα πρέπει x>0 , δηλαδή $D_f=(0,\infty)$

$g(x)=2-e^x$, Dg=R

α) $D_{gof}=\{x \in D_f / f(x) \in Dg\}=\{x>0$ και $2\ln x-1 \in R\}=(0,\infty)$

$$(gof)(x)=g(f(x))=2-e^{2\ln x-1} = 2-e^{\ln x^2-\ln e} = 2-e^{\ln\frac{x^2}{e}} = 2-\frac{x^2}{e}$$

$\beta) Dfog = \{x \in Dg \setminus g(x) \in Df\} = \{x \in R$ και $2-e^x > 0\} = \{x \in R$ *και* $-e^x > -2\} = \{x \in R$ και $e^x < 2\} =$

$= \{x \in R$ και $x<\ln 2\}=(-\infty,\ln 2)$

$(fog)(x)=f(g(x))=2\ln(2-e^x)-1$

Γ2. $D_f \cap D_g = (0,\infty)$

$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow 2-e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$

$D_h = \{x / x \in D_f \cap D_g, \mu\varepsilon$ $g(x) \neq 0\}=(0,\ln 2) \cup (\ln 2,\infty)$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2\ln x-1}{2-e^x} .$$

Γ3.

Για να βρούμε την σχετική θέση της Ch με τον x'x θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου της h .

x	$-\infty$ 0		$\ln 2$		$\sqrt{e}$		∞
$2\ln x-1$	\	-		+	0	+	
$2-e^x$	\	+	0	+		-	
h(x)	\	-	||	+	0	-	

Δικαιολόγηση προσήμων:

- $2\ln x-1=0 \Leftrightarrow 2\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

  $2\ln x-1>0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$

  $2\ln x-1<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<\sqrt{e}$

- $2-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

  $2-e^x>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$

  $2-e^x<0 \Leftrightarrow e^x<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$

Άρα

C_h πάνω από x'x όταν $x \in (\ln 2,\sqrt{e})$ και C_h κάτω από x'x όταν $x \in (-\infty,\ln 2) \cup (\sqrt{e},\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

'Ε$\chi ουμε$ ότι : $f^3(x)+f(x)-x+1=0 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=x-1 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1)=x-1$ (1)

Α$\varphi ού$ $f^2(x)+1\neq 0$ τότε η (1) γίνεται : $f(x)=\dfrac{x-1}{(f^2(x)+1)}$.

Δ2.

Παρατηρώ ότι αφου $f^2(x)+1>0$ **Άρα οι <u>ριζες</u> και το <u>πρόσημο</u> της** $f(x)=\dfrac{x-1}{f^2(x)+1}$ **εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή!**

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=x-1$ **,** $x\in R$ **.**

<u>Ρίζες:</u> $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

<u>Πρόοσημο:</u>

x	$-\infty$	**1**	∞
g(x)	**-**	0	**+**
f(x)	**-**	0	**+**

Δ3.

$e^{f(x)}-2016=0$ (2)

$e^{f(x)}-2016=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}=2016 \Leftrightarrow f(x)=\ln 2016$ (3)

$\ln 2016 \in R = f(Df)$ άρα η (3) έχει 1 τουλαχιστον λύση στο R επομένως ισοδύναμα και η (2).