Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Λύσεις 1ου Διαγωνίσματος

Α1.Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

  Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

Α4. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ δεν ορίζεται στο $x = 0$.

Α5. α) Λ β) Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Θέτω $\ln x = u,\ u \in \mathbb{R}$ και η σχέση $f(\ln x) = \ln x |\ln x|$ γίνεται $f(u) = u|u|, u \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = x|x|,\ x \in \mathbb{R}$.

Β2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x > 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -2x > 0$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ και για $x < 0$ είναι $-x^2 = y < 0 \Leftrightarrow x^2 = -y \Leftrightarrow -x = \sqrt{-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}$.

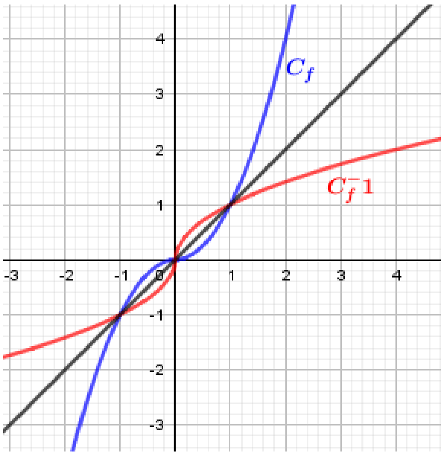
Είναι $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

B3. Για κάθε $x \geq 0$ είναι

$f(x) \geq f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 \geq x \Leftrightarrow x^4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) \geq f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^2 \geq -\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2 \leq \sqrt{-x} \Leftrightarrow x^4 \leq -x \Leftrightarrow x^4 + x \leq 0 \Leftrightarrow$

$x(x^3 + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1$



B4. $f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1,\ x \in [0,1]$.

Είναι $h(1) = 0$, οπότε από το σχήμα Horner η h γράφεται $h(x) = (x-1)(x^3 + x - 1)$.

Έστω $\pi(x) = x^3 + x - 1,\ x \in [0,1]$. Είναι $\pi(0) = -1,\ \pi(1) = 1$, δηλαδή $\pi(0)\pi(1) < 0$ και επειδή η π είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\pi(x_1) = 0$.

Η π είναι παραγωγίσιμη με $\pi'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \pi \nearrow \mathbb{R}$, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\pi(x) = 0$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $(\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1)$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow$ $f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

B5. $f^2(\eta\mu x) \geq f^2(x) + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x \geq x^4 + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \geq x^{2020}$ (1)

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $\eta\mu^4 x \leq x^4 \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \leq 0$. Όμως $x^{2020} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα η (1) ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. 1ος τρόπος

$$f'(x) = \frac{\ln(x-e)^{x-e} + x - 3}{x - e} = \frac{\cancel{(x-e)}\ln(x-e)}{\cancel{x-e}} + \frac{x-3}{x-e} = \ln(x-e) + (x-3)\frac{1}{x-e} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (x-3)'\ln(x-e) + (x-3)\frac{1}{x-e} \Leftrightarrow f'(x) = \left[(x-3)\ln(x-e)\right]' \Leftrightarrow$$

$f(x) = (x-3)\ln(x-e) + c,\ c \in \mathbb{R}$. Είναι $f(e+1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f(x) = (x-3)\ln(x-e),\ x > e$.

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - (x-3)\ln(x-e),\ x > e$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(e, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=f'(x)-\ln(x-e)-(x-3)\frac{1}{x-e}=\frac{\ln(x-e)^{x-e}+x-3}{x-e}-\frac{(x-e)\ln(x-e)+x-3}{x-e}\Leftrightarrow$$

$$h'(x)=f'(x)-\ln(x-e)-(x-3)\frac{1}{x-e}=\frac{\ln(x-e)^{x-e}+x-3}{x-e}-\frac{\ln(x-e)^{x-e}+x-3}{x-e}=0\Leftrightarrow$$

$h(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $h(e+1)=f(e+1)-(e+1-3)\ln(e+1-e)=0\Leftrightarrow h(x)=0\Leftrightarrow$

$f(x)=(x-3)\ln(x-e)$ για κάθε $x>e$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[3,e+1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(3,e+1)$ με $f'(x)=\dfrac{\ln(x-e)^{x-e}+x-3}{x-e},\ x>e$.

Είναι $f(3)=(3-3)\ln(3-e)=0,\ f(e+1)=(e+1-3)\ln(\cancel{e}+1-\cancel{e})=0$, δηλαδή $f(3)=f(e+1)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(3,e+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Γ3. Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(e,+\infty)$ με

$$f''(x)=\left(\ln(x-e)+\frac{x-3}{x-e}\right)'=\frac{1}{x-e}+\frac{\cancel{x}-e-\cancel{x}+3}{(x-e)^2}=\frac{1}{x-e}+\frac{3-e}{(x-e)^2}>0 \text{ άρα η } f' \nearrow .$$

Για κάθε $e<x<\xi$ είναι $f'(x)<f'(\xi)=0$ και για κάθε $x>\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(e,+\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,\xi]$,γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$ οπότε έχει τοπικό ελάχιστο στο $x=\xi$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-f(x)=-2f(x),\ x>e$.

Είναι $\varphi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=e+1$

Για $3<x<e+1$ είναι $x-3>0,\ 0<x-e<1\Rightarrow\ln(x-e)<0$ άρα για κάθε $x\in(3,e+1)$ είναι $f(x)<0\Leftrightarrow\varphi(x)>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E(\Omega)=\int_3^{e+1}\varphi(x)dx=\int_3^{e+1}-2f(x)dx=-2\int_3^{e+1}f(x)dx=-2\int_3^{e+1}(x-3)\ln(x-e)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-2\left[\cancel{\frac{(x-3)^2}{2}\cdot\ln(x-e)}\right]_3^{e+1}{}^{0}+\int_3^{e+1}\frac{(x-3)^2}{x-e}dx\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rl|l} & x^2-6x+9 & x-e \\ \hline + & -x^2+ex & x+e-6 \\ \hline + & (e-6)x+9 & \\ & -(e-6)x+e^2-6e & \\ \hline & e^2-6e+9 & \end{array}$$

$$E(\Omega)=\int_3^{e+1}\frac{x^2-6x+9}{x-e}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\int_3^{e+1}\left(x+e-6+\frac{e^2-6e+9}{x-e}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\left[\frac{x^2}{2}+ex-6x+(e^2-6e+9)\ln(x-e)\right]_3^{e+1}\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{(e+1)^2}{2}+(e-6)(e+1)-\frac{9}{2}-3e+18-(e^2-6e+9)\ln(3-e)\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{e^2+2e+1}{2}+e^2-5e-6+\frac{27}{2}-3e-(e-3)^2\ln(3-e)\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{e^2+2e+1+2e^2-10e-12+27-6e}{2}-(e-3)^2\ln(3-e)\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{3e^2-14e+16}{2}-(e-3)^2\ln(3-e)$$

Θέμα Δ

Δ1. 1ος τρόπος

Αν στη σχέση $f(x) \geq e^x - 3(x+1)^2 + 2$ η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx > \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(e^x - 3(x+1)^2 + 2\right)dx \Leftrightarrow e^{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}} + (1-\alpha)^3 - (1+\alpha)^3 + 4\alpha > \left[e^x - (x+1)^3 + 2x\right]_{-\alpha}^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^{\alpha}} - \cancel{\frac{1}{e^{\alpha}}} + (1-\alpha)^3 - (1+\alpha)^3 + 4\alpha > \cancel{e^{\alpha}} - (1+\alpha)^3 + 2\alpha - \cancel{\frac{1}{e^{\alpha}}} + (1-\alpha)^3 + 2\alpha \Leftrightarrow$$

$(1-\alpha)^3 - (1+\alpha)^3 > (1-\alpha)^3 - (1+\alpha)^3$ που είναι άτοπο.

Άρα $f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ και τελικά $f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}$

2ος τρόπος

Έστω $g(x) = f(x) - e^x + 3(x+1)^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(x) - e^x + 3(x+1)^2 - 2\right]dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx - \left[e^x + (x+1)^3 - 2x\right]_{-\alpha}^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \frac{e^{2\alpha}-1}{e^{\alpha}} + \cancel{(1-\alpha)^3} - \cancel{(1+\alpha)^3} + 4\alpha - e^{\alpha} + \cancel{(1+\alpha)^3} - 2\alpha + \frac{1}{e^{\alpha}} - \cancel{(1-\alpha)^3} - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 0$$

Αν η ισότητα $g(x) = 0$ δεν ισχύει για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, τότε επειδή $g(x) \geq 0$ θα είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx > 0$ που είναι άτοπο. Άρα για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2,\ x \in [-\alpha, \alpha]$ και τελικά $f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - 6(x+1)$ και $f''(x) = e^x - 6$.

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \ln 6$
Για κάθε $x < \ln 6$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, \ln 6]$ και για κάθε $x > \ln 6$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [\ln 6, +\infty)$.
Είναι $f'(\ln 6) = -6\ln 6$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - 6(x+1)\right) = +\infty$ και

x	$-\infty$ ρ_1	$\ln 6$	ρ_2	$+\infty$
f''	$-$		$+$	
f'	$+$ 0	$-$ $-6\ln 6$	$-$	0 $+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 6(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \frac{6(x+1)}{e^x}\right)\right] = +\infty(1-0) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6(x+1)}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x} = 0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, \ln 6)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-6\ln 6, +\infty)$. Επειδή $0 \in f'(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_1) = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (\ln 6, +\infty)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = (-6\ln 6, +\infty)$. Επειδή $0 \in f'(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_2) = 0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο ρίζες, η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

Δ3. Για κάθε $x<\rho_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\rho_1)=0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,\rho_1]$,

για κάθε $\rho_1<x<\ln 6 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\rho_1)=0 \Rightarrow f\searrow[\rho_1,\ln 6]$,

για κάθε $\ln 6<x<\rho_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\rho_2)=0 \Rightarrow f\searrow[\ln 6,\rho_2]$ και τέλος για κάθε

$x>\rho_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\rho_2)=0 \Rightarrow f\nearrow[\rho_2,+\infty)$

Είναι $f'(0)=-5<0$, οπότε $\rho_1<0$ γιατί $0\in f'((-\infty,0))$.

Είναι $\rho_1<0 \overset{f\searrow[\rho_1,\ln 6]}{\Leftrightarrow} f(\rho_1)>f(0)=0$, $\rho_2>0 \overset{f\searrow[\rho_1,\rho_2]}{\Leftrightarrow} f(\rho_2)<f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-3(x+1)^2+2\right)=0-\infty=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-3(x+1)^2+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{3(x+1)^2}{e^x}\right)+2\right]=+\infty(1-0)+2=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,\rho_1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(A_1)=(-\infty,f(\rho_1))$

Επειδή $0\in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Στο διάστημα $A_2=(\rho_1,\rho_2)$ ανήκει το 0, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει μοναδική ρίζα το 0 αφού $f(0)=0\in f(A_2)=(f(\rho_2),f(\rho_1))$.

Τέλος στο διάστημα $A_3=(\rho_2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_3)=(f(\rho_2),+\infty)$. Επειδή $0\in f(A_3)$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in A_3$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$. Τελικά η f έχει τρείς ρίζες, τις $x_1,x_2,0$.

Δ4. $e^x-(e^2-18)x>3(x+1)^2+9-e^2 \Leftrightarrow e^x-3(x+1)^2+2>(e^2-18)x+11-e^2 \Leftrightarrow$

$f(x)>(e^2-18)x+11-e^2$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=2$ έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow$

$y-(e^2-25)=(e^2-18)(x-2)\Leftrightarrow y-(e^2-18)x-e^2+11$

Επειδή $f'\nearrow[\ln 6,+\infty)$ η f είναι κυρτή οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $(2,+\infty)\subseteq(\ln 6,+\infty)$, δηλαδή $f(x)>(e^2-18)x+11-e^2$ για κάθε $x>2$