4ο τελικό διαγώνισμα	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ	
Μάθημα :	**ΑΛΓΕΒΡΑ**
Τάξη :	Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία :	
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :	

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Μία πολυωνυμική εξίσωση αν έχει ρίζες ,αυτές είναι διαιρέτες του σταθερού όρου του πολυωνύμου.

β) Το πολυώνυμο $\alpha x^3 + 2x^2 - x + 1, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι 3ου βαθμού για κάθε τιμή του α.

γ) $\ln\theta_1 + \ln\theta_2 = \ln(\theta_1 \cdot \theta_2), \theta_1, \theta_2 > 0$

δ) Κάθε άρτια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

ε) Η γραμμική εξίσωση $2x + y = 1$ έχει λύση την (x,y)=(0,1).

10 Μονάδες

Α2. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Β1. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

13 Μονάδες

Β2. Αν $\eta\mu\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta) - \eta\mu(\pi-\theta)\eta\mu(-\theta).$$

12 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 1, x > 0$.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

8 Μονάδες

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)-1)^2 - f(x) + 1 = 0$

8 Μονάδες.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση: $(f(x)-1)^2 - f(x) + 1 \leq 0$.

9 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

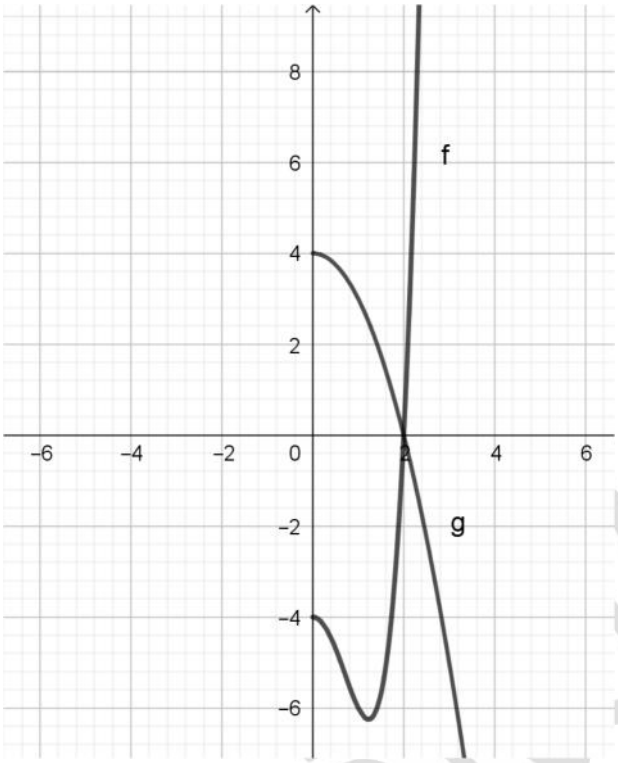
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκησόπολις

7 Μονάδες

Δ2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Μονάδες

Δ3. Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

6 Μονάδες

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

6 Μονάδες

Ασκησοπολις

Λύσεις

Α1. α) Λ β) Λ γ) Σ
δ) Σ ε) Σ

Α2. $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \overset{\sigma\upsilon\nu^2\omega\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega+1=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Επειδή $\theta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, είναι ημθ < 0, άρα $\eta\mu\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Β2. $A=\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)-\eta\mu(\pi-\theta)\eta\mu(-\theta) \Leftrightarrow A=-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)=-\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow$

$A=-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{9}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=2 \Leftrightarrow \ln x+1=2 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.

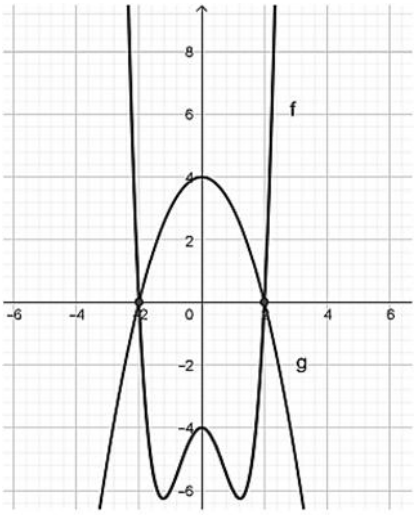
Γ2. $(f(x)-1)^2-f(x)+1=0 \Leftrightarrow (f(x)-1)^2-(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow (f(x)-1)(f(x)-1-1)=0 \Leftrightarrow$
$(f(x)-1)(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow (\ln x+1-1)(\ln x+1-2)=0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)=0 \Leftrightarrow$
$(\ln x=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $(\ln x=1 \Leftrightarrow x=e)$

Γ3. $(f(x)-1)^2-f(x)+1\le 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)\le 0$. Θέτουμε lnx = ω και η ανίσωση γίνεται
$\omega(\omega-1)\le 0 \Leftrightarrow 0\le\omega\le 1 \Leftrightarrow$
$0\le\ln x\le 1 \Leftrightarrow \ln 1\le\ln x\le\ln e \Leftrightarrow 1\le x\le e$

ω	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\omega(\omega-1)$	+	0	−	0	+

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι συναρτήσεις f,g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και είναι :
$f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2-4=x^4-3x^2-4=f(x)$ και
$g(-x)=-(-x)^2+4=-x^2+4=g(x)$



Δ2. Οι συναρτήσεις f,g είναι άρτιες άρα οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

Δ3. i) Γραφικά παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες -2 και 2 άρα $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\pm 2$.
Αλγεβρικά έχουμε
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-2x^2-8=0\ (1)$
Θέτουμε $x^2=y\ge 0$ και είναι $(1) \Leftrightarrow y^2-2y-8=0$
με διακρίνουσα $\Delta=36$ και ρίζες $y_1=-2$, η οποία απορρίπτεται και $y_2=4$ δεκτή.

Άρα $y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

ii) Γραφικά παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(-2,2)$. Άρα $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

Αλγεβρικά ομοίως θέτουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα $x^2 = y \geq 0$ και είναι

$$y^2 - 2y - 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-2,4) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Ασκησόπολις