Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

10ο Διαγώνισμα

16 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ε) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός της πόλης είναι *x* εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $f(x)=10\sqrt{2(x^2+x)}$ $x\geq 0$ χιλιάδες αυτοκίνητα.

Β1. Να αποδείξετε ότι όταν αυξάνεται ο πληθυσμός της πόλης αυξάνεται και ο αριθμός των αυτοκινήτων.

μονάδες 5

Β2. α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

μονάδες 9

β) Τι εκφράζει η αντίστροφη της συνάρτησης f;

μονάδες 2

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της πόλης όταν ο αριθμός των αυτοκίνητων είναι 120000.

μονάδες 4

Β3. Αν ο πληθυσμός της πόλης αυξάνεται με ρυθμό $x'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ όπου $t\geq 1$ ο χρόνος σε έτη και τη χρονική στιγμή t=1 ο πληθυσμός της πόλης είναι 500000, να βρείτε ποια χρονική στιγμή θα υπάρχουν 120000 αυτοκίνητα.

μονάδες 5

(Δίνεται $\sqrt{7225}=85$)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την παράγωγο της f.

μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Γ3. Δείξτε ότι για κάθε εφαπτόμενη της C_f υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη κάθετη σε αυτή.

μονάδες 7

Γ4.Έστω τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(-x,f(-x))$, $x\geq 1$.Αν το σημείο Α ξεκινά από τη θέση $x=1$ να απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,4t μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο, όπου t ο χρόνος σε sec.

Τη χρονική στιγμή που το Α διέρχεται από το σημείο $(8,4)$, να βρείτε :

α) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ,

β) την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα x΄x.

μονάδες 5+4

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

- η f είναι συνεχής
- $f^2(x)-2xf(x)e^{-x}-2f(x)e^{-x}=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)-x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-e^{-2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $e^{\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)}-2=g(x)-\frac{x^3}{6}e^{-x}-\frac{x^2}{2}e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=(x+1)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι $g(x)=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Δ3.Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Δ4. Αν για τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{h(x)}-h(x)-\frac{h^3(x)}{6}\right)=1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

μονάδες 6

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

Α3. α) Αληθής **β)** $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 10\dfrac{\cancel{2}(2x+1)}{\cancel{2}\sqrt{2(x^2+x)}} = \dfrac{10(2x+1)}{\sqrt{2(x^2+x)}} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επομένως ο αριθμός των αυτοκινήτων στη πόλη αυτή διαρκώς αυξάνεται.

Β2. α) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 10\sqrt{2(x^2+x)} = y,\ y \geq 0 \Leftrightarrow 100 \cdot 2(x^2+x) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + x = \frac{y^2}{200} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{y^2}{200} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{y^2+50}{200} \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{y^2+50}{200}} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{y^2+50}{200}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y^2+50}{200}} - \frac{1}{2}$$

Άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y^2+50}{200}} - \dfrac{1}{2},\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+50}{200}} - \dfrac{1}{2},\ x \geq 0$.

β) Η f^{-1} εκφράζει τον πληθυσμό της πόλης σε εκατοντάδες χιλιάδες σε σχέση με τον αριθμό των αυτοκινήτων της σε χιλιάδες.

γ) $f^{-1}(120) = \sqrt{\dfrac{120^2+50}{200}} - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{14.450}{200}} - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{7.225}{100}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{85}{10} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2} - \dfrac{1}{2} = 8$, άρα ο πληθυσμός της πόλης είναι 800.000 άτομα.

Β3. Για $t \geq 1$ είναι $x'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow x'(t)=\left(\sqrt{t}\right)' \Leftrightarrow x(t)=\sqrt{t}+c,\ c \in \mathbb{R}$.

Είναι $x(1)=5 \Leftrightarrow 1+c=5 \Leftrightarrow c=4$, άρα $x(t)=\sqrt{t}+4,\ t \geq 1$.

Επειδή η πόλη έχει 120.000 αυτοκίνητα όταν ο πληθυσμός της είναι 800.000 άτομα, είναι $x(t)=8 \Leftrightarrow \sqrt{t}+4=8 \Leftrightarrow \sqrt{t}=4 \Leftrightarrow t=16$.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(x)=\sqrt[3]{|x|^2}=\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x<0 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x^{\frac{1}{3}}$ και x^2 με τύπο $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x^2 και $(-x)^{\frac{1}{3}}$ με τύπο $f'(x)=-\dfrac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}}$.

Στο $x=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Γ2. Για $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για $x<0$ είναι $f'(x)=-\dfrac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}}<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$.

Γ3. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \mathbb{R}^*$ ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$

Αν $x_1,x_2<0$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)>0$ απορρίπτεται.

Αν $x_1,x_2>0$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)>0$ απορρίπτεται

Αν x_1,x_2 ετερόσημοι έστω $x_1<0,\ x_2>0$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x_1}}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x_2}}=-1 \Leftrightarrow$

$3\sqrt[3]{-x_1}\cdot3\sqrt[3]{x_2}=4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x_1x_2}=\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{-x_1x_2}\right)^3=\left(\dfrac{4}{9}\right)^3 \Leftrightarrow -x_1x_2=\dfrac{64}{729} \Leftrightarrow x_2=-\dfrac{64}{729x_1}$ άρα για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \mathbb{R}^*$ ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

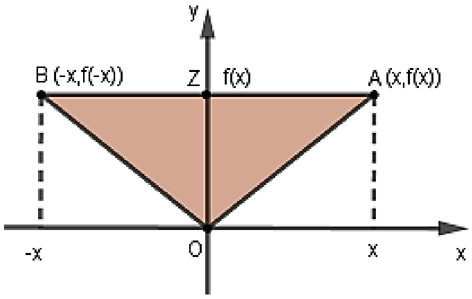
Γ4. Είναι $x'(t)=0,4t=\left(0,2t^2\right)' \Leftrightarrow x(t)=0,2t^2+c,\ c \in \mathbb{R}$.

Επειδή το Α ξεκινά να κινείται από το $x=1$, είναι $x(0)=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $x(t)=0,2t^2+1$.

Όταν το Α βρίσκεται στη θέση $(8,4)$ είναι

$x(t_0)=8 \Leftrightarrow 0,2t_0^2+1=8 \Leftrightarrow t_0^2=35 \Leftrightarrow t_0=\sqrt{35}\,\text{sec}$

α) Είναι $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό:



$$E(x)=\frac{1}{2}(AB)(OZ)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot f(x)=x\sqrt[3]{x^2},\ x\geq 1.$$

Έστω $E(t)=x(t)\sqrt[3]{x^2(t)}=x(t)x^{\frac{2}{3}}(t)=x^{\frac{5}{3}}(t),\ t\geq 0$

Είναι $E'(t)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}(t)x'(t)$,

οπότε $E'(t_0)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}(t_0)x'(t_0)=\frac{5}{3}8^{\frac{2}{3}}\cdot 0,4t_0=\frac{2}{3}\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt{35}=\frac{8\sqrt{35}}{3}$ μ.μ.^{2} / sec

β) Η απόσταση του Α από τον άξονα x΄x είναι το μήκος $f(x)$, οπότε η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα x΄x, είναι το $f'(x)$.

Είναι $f(x(t))=\sqrt[3]{x^2(t)}$ άρα $f(t)=\sqrt[3]{(0,2t^2+1)^2}$, $t\geq 0$ και $f'(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{0,4t}{\sqrt[3]{0,2t^2+1}}$, οπότε

$f'(\sqrt{35})=\frac{2}{3}\cdot\frac{0,4\sqrt{35}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{2\sqrt{35}}{15}$ μ.μ. / sec

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)-2xf(x)e^{-x}-2f(x)e^{-x}=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)-x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-e^{-2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)e^{-x}(x+1)+x^2e^{-2x}+2xe^{-2x}+e^{-2x}=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)e^{-x}(x+1)+(x^2+2x+1)e^{-2x}=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)e^{-x}(x+1)+\left[(x+1)e^{-x}\right]^2=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)\Leftrightarrow$

$\left[f(x)-e^{-x}(x+1)\right]^2=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)$ (1)

Έστω $f(x)-(x+1)e^{-x}=y$, τότε η (1) γίνεται: $y^2=\eta\mu^2 y\Leftrightarrow|\eta\mu y|=|y|\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow$

$f(x)-(x+1)e^{-x}=0\Leftrightarrow f(x)=(x+1)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. $e^{\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)}-2=g(x)-\frac{x^3}{6}e^{-x}-\frac{x^2}{2}e^{-x}-1\Leftrightarrow e^{\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)}-1=g(x)-\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\Leftrightarrow$

$e^{\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)}-g(x)+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-1=0$ (2)

Έστω $\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)=w,\ w\in\mathbb{R}$, τότε η (2) γίνεται: $e^w+w-1=0$ (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η a είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $a'(x)=e^x+1>0\Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$. Η (3) γίνεται:

$a(w)=a(0)\Leftrightarrow w=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)=0\Leftrightarrow g(x)=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

Δ3. Είναι $\varphi(x)=f(x)+g(x)=(x+1)e^{-x}+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x}-\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x}=\left(\cancel{\frac{x^2}{2}}+\cancel{x}+\cancel{1}-\frac{x^3}{6}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{x}-\cancel{1}\right)e^{-x}=-\frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

Είναι $\varphi'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}x^3e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow x^3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το $\varphi(0)=1$.

Δ4. Επειδή η φ έχει μέγιστο το $\varphi(0)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\varphi(x)\leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\leq e^x \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) όπου x το $h(x)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{h^3(x)}{6}+\frac{h^2(x)}{2}+h(x)+1\leq e^{h(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{h^2(x)}{2}\leq e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1 \Leftrightarrow$$

$$h^2(x)\leq 2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right) \Leftrightarrow$$

$$|h(x)|\leq\sqrt{2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right)} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right)}\leq h(x)\leq\sqrt{2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right)} \Leftrightarrow$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right)}=\sqrt{2(1-1)}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\left[-\sqrt{2\left(e^{h(x)}-\frac{h^3(x)}{6}-h(x)-1\right)}\right]=-\sqrt{2(1-1)}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.