Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

1ο Διαγώνισμα

23-2-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq m$ για κάθε $x\in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β), ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$

β) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)=-2021$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(\alpha,x_0]$ και κοίλη στο $[x_0,\beta)$ τότε το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της.

δ) Κάθε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

ε) Αν μια μη σταθερή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στο α και είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε $f'(\alpha)=0$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x,\ x>0$ και $h(x)=\ln x-x,\ x>0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $(f\circ g)(x)=-h(x)$.

μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε τις f, h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)>h(x)$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

Β3. Να βρείτε ένα σημείο της C_f και ένα σημείο της C_h στο οποίο οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες.

μονάδες 5

Β4. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Α(1,0) εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h.

μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι $g(x)+h(x)<0$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2(f'(x)-1)=2\ln x-1$ και

- $f(1)=0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{x^2-2\ln x-1}{x}, x>0$.

μονάδες 5

Γ2. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

μονάδες 5

Γ3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

μονάδες 5

Γ5. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο το $x = 0$.

μονάδες 7

Έστω τώρα ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\le f(x)$ για κάθε $x\ge 0$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x<0$.

μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το πρόσημο της f.

μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

μονάδες 5

Askisopolis

Καλή Τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.
— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.
Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει

$$m\le f(x)\le M,\quad \text{για κάθε}\quad x\in[\alpha,\beta].$$

Α3. α) Ψευδής
β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι $f(x)\ge -2$ και γενικά από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό στη θέση του – 2, όμως το -2 δεν είναι ελάχιστο της f γιατί δεν υπάρχει σημείο της C_f με αυτή την τεταγμένη (δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=m$)

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_{f\circ g}=\{x\in A_g\,/\,g(x)\in A_f\}=\{x>0\,/\,\ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)=A_h=A_{-h}$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{\ln x}-\ln x=x-\ln x=-h(x)$

Β2. Είναι $f'(x)=e^x-1$ και $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0$.
Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=1$.
Είναι $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $h'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει μέγιστο το $h(1)=-1$.
Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\ge f(1)=1>-1=h(1)\ge h(x)$.

Β3. Είναι $f'(0)=0$ και $h'(1)=0$ Επειδή $f'(0)=h'(1)$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Ο(0,0) είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_h στο σημείο Β(1,-1).

Β4. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}$ και $g'(1)=1$. Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι η ευθεία ε: $y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$

Για να εφάπτεται η ε στην C_f πρέπει να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_1)=\lambda_\varepsilon=1 \Leftrightarrow e^{x_1}-1=1 \Leftrightarrow e^{x_1}=2 \Leftrightarrow x_1=\ln 2$.

Είναι $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\ln 2=2-\ln 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=\ln 2$ έχει εξίσωση:

$y-f(\ln 2)=f'(\ln 2)(x-\ln 2) \Leftrightarrow y-2+\ln 2=x-\ln 2 \Leftrightarrow y=x+2-2\ln 2$ και δεν είναι η ε.

Για να εφάπτεται η ε στην C_h πρέπει να υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$h'(x_2)=\lambda_\varepsilon=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2}-1=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2}=2 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{1}{2}$. Είναι $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\ln 2-\dfrac{1}{2}$ και η εφαπτομένη της C_h στο $x_2=\dfrac{1}{2}$ έχει εξίσωση: $y-h\left(\dfrac{1}{2}\right)=h'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y+\ln 2+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=x-1-\ln 2$ και δεν είναι η ε.

Β5. Έστω $\varphi(x)=g(x)+h(x)=\ln x+\ln x-x=2\ln x-x,\ x>0$.

Είναι $\varphi'(x)=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}$. Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το

$\varphi(2)=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι $\varphi(x)\le\varphi(2)<0 \Leftrightarrow g(x)+h(x)<0$

Θέμα Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x}, x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x)=f'(x)-\frac{\left(2x-\frac{2}{x}\right)\cdot x-\left(x^2-2\ln x-1\right)}{x^2}=f'(x)-\frac{2x^2-2-x^2+2\ln x+1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{x^2f'(x)-x^2-2\ln x+1}{x^2}=\frac{x^2\left(f'(x)-1\right)-2\ln x+1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{\cancel{2\ln x}-\cancel{1}-\cancel{2\ln x}+\cancel{1}}{x^2}\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c, c\in\mathbb{R}$$. Όμως $g(1)=f(1)-\dfrac{1-2\ln 1-1}{1}=0$ οπότε

$$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-\frac{x^2-2\ln x-1}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-2\ln x-1}{x}, x>0 .$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{\left(2x-\frac{2}{x}\right)x-\left(x^2-2\ln x-1\right)}{x^2}=\frac{2x^2-2-x^2+2\ln x+1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2+2\ln x-1}{x^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^2+2\ln x-1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=2x+\dfrac{2}{x}>0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $x>1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(1)=0$ και για $0<x<1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)<h(1)=0$.

Όμως $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ οπότε $f'(x)>0$ για $x>1$ και $f'(x)<0$ για $0<x<1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1)=0$.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f''(x)=\frac{\left(2x+\frac{2}{x}\right)\cdot x^{\cancel{2}}-2\cancel{x}\left(x^2+2\ln x-1\right)}{x^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2x^2+2-2x^2-4\ln x+2}{x^3}\Leftrightarrow f''(x)=\frac{4-4\ln x}{x^3}.$$

Έχουμε $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{4-4\ln x}{\underbrace{x^3}_{>0}}\ge 0\Leftrightarrow 4-4\ln x\ge 0\Leftrightarrow 4\ln x\le 4\Leftrightarrow \ln x\le 1\Leftrightarrow x\le e$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $f''(x)>0$ για $0<x<e$, $f''(x)<0$ για $x>e$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,e]$, κοίλη στο $[e,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(e,f(e))\equiv\left(e,\dfrac{e^2-3}{e}\right)$.

Γ4. Έχουμε :

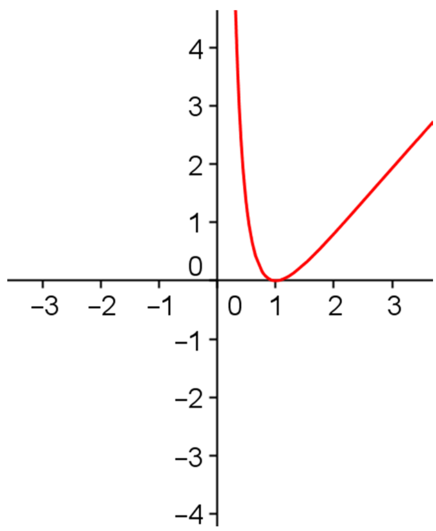
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x^2-2\ln x-1\right)\dfrac{1}{x}\right]=(0+\infty-1)\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y΄y.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-0-0=+\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)=1-0-0=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-2\ln x-1-\cancel{x^2}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\cdot\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=0-0=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$ άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$.



Γ5. Για $x\ne 1$: $f(x)>0$ οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο $(1,0)$.

x	0		1		e		+∞
f″		+		+	0	−	
f′		−	0	+		+	
f		↘	ΟΜ	↗	ΣΚ	↗	

Επίσης δεν τέμνει τον y΄y.

Askisopolis

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\varphi(x)=\dfrac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}$, $x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$. Είναι $e^{f(x)}+f(x)-1=x\varphi(x)$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{f(x)}+f(x)-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\varphi(x)\right]\Leftrightarrow e^{f(0)}+f(0)-1=0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=e^{x}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $a(0)=0$. Είναι

$a'(x)=e^{x}+1>0\Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $a\big(f(0)\big)=a(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, το κρίσιμο σημείο της θα είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$, οπότε αρκεί $f'(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$ (2)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x= 0 είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=e^{f(x)},\ x\in\mathbb{R}$. Η t είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $t'(x)=e^{f(x)}f'(x)$. Είναι $t'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t(x)-t(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=e^{f(0)}f'(0)=f'(0)$.

Η σχέση (2) γίνεται: $f'(0)+f'(0)=0\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το x = 0.

Δ2. Έστω $g(x)=f'(x)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f''(x)-f'(x)<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\leq 0\Leftrightarrow f'(x)\leq f(x)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>f(x)$.

Δ3. Είναι $f'(x)\leq f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\leq 0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)\leq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $h'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<f(x)\Rightarrow h'(x)<0$ και επειδή h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>f(x)\Rightarrow h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x<0\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$ και

για κάθε $x>0\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

Δ4. Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)<0\Rightarrow f''(x)<f'(x)<f(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Δ5. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό (υπάρχει το $f'(0)$), αν ήταν σημείο καμπής το O τότε $f''(0)=0$. Τότε όμως από τη σχέση $f''(x)<f'(x)$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για x = 0 προκύπτει $f''(0)<f'(0)\Leftrightarrow 0<0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.