Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

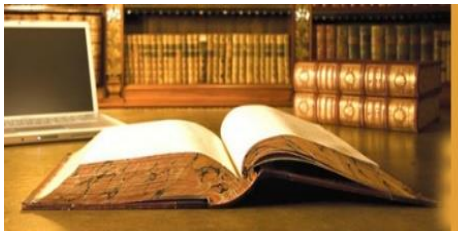
Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

4ο Διαγώνισμα

16-3-2021

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, τότε η θέση του είναι μοναδική».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

i. μια, τουλάχιστον , ρίζα στο $(0,1)$.

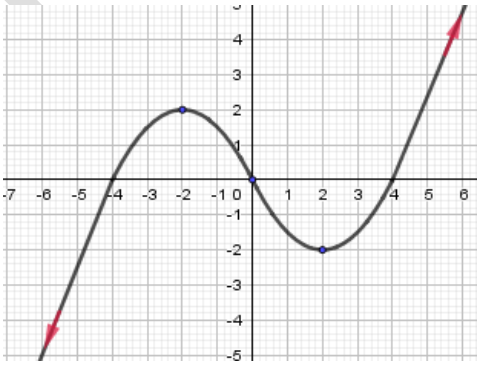
ii. μια, ακριβώς , ρίζα στο $(-1,0)$.

iii. τρείς πραγματικές ρίζες.

μονάδες 2+2+6

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας τρείς φορές παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Β1. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f.

μονάδες 8

Β2. Γνωρίζοντας ότι η f' είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας δικές σας τιμές στην f, να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική της παράσταση.

μονάδες 3+4

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

μονάδες 3

Β4. Να αποδείξετε ότι $f''(-2) = f''(2) = 0$.

μονάδες 4

Β5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

μονάδες 3

Askisopolis

Θέμα Γ

Δύο γλάροι Α, Β πετούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και τη χρονική στιγμή t = 0 οι γλάροι βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και απέχουν μεταξύ τους 100 μέτρα.

Γ1. Αν οι τροχιές τους είναι οριζόντιες και κινούνται με αντίθετη φορά με μέτρο της ταχύτητας 20m/min και έστω $x(t)$ η συνάρτηση θέσης του γλάρου Β, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόστασή τους τη χρονική στιγμή t είναι $d(t)=\sqrt{4x^2(t)+100^2}$.

β) Να βρείτε την απόσταση αυτών, όταν ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους είναι 10 m/min.

Μονάδες 5,5

Γ2. Έστω η τροχιά του γλάρου Α που είναι χαμηλότερα είναι οριζόντια και του γλάρου Β σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία 45 μοιρών και ο γλάρος πλησιάζει προς το έδαφος. Αν οι γλάροι κινούνται εκατέρωθεν της κατακόρυφου, με - x(t) η συνάρτηση θέσης του γλάρου Α και η ταχύτητα απομάκρυνσης του Β από τη κατακόρυφο είναι $x'(t)=20$m/min και ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα του γλάρου Α,

α) Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t η απόσταση των γλάρων είναι

$$d(t)=\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$$

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης τους, όταν ο γλάρος Α έχει διανύσει απόσταση 100m.

Μονάδες 8,7

Μη φάτε, έχουμε γλαρόσουπα

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Δ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

μονάδες 7

Δ2.Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $(1-\alpha)\ln x+\alpha+1=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$.

μονάδες 6

Δ3.Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το σημείο τομής της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x , δηλαδή από το σημείο $A(e,0)$.

μονάδες 7

Δ4.Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να γίνει μια πρόχειρη γραφική της παράσταση.

μονάδες 5

Καλή Τύχη!

Askisopolis