Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

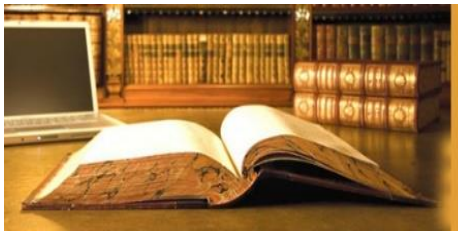
Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

13ο Διαγώνισμα

24-5-2021

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει περισσότερες από μία κατακόρυφες ασύμπτωτες».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

β) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

γ) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$.

ε) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ και $g(x)=e^x$.

Β1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

μονάδες 3

Β2. Έστω $\varphi(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Β3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

μονάδες 4

Β4. Να βρείτε την φ^{-1} .

μονάδες 5

Β5. Να μελετήσετε την φ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 3

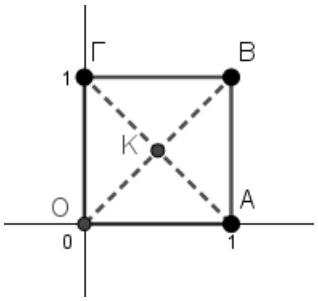
Β6. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της φ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

μονάδες 6

Askisopolis

Θέμα Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του διπλανού σχήματος και μία παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό .



Γ1. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου.

μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την διαγώνιο ΑΓ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη α και την διαγώνιο ΟΒ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη β.

μονάδες 6

Γ3. Αν $\alpha < \beta < \frac{1}{2}$ (α ,β από ερώτημα Γ2) ,να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)\left(2f(\xi)-1\right)=2\xi-1$.

μονάδες 5+5=10

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f που απέχει από το σημείο Γ(0,1) λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f που απέχει από το σημείο Γ(0,1) περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=\ln^2 x$ για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f.

μονάδες 5

Έστω $f(x)=|\ln x|,\ x>0$

Δ2. Να κάνετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 2

Δ3. Να βρείτε δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι κάθετες.

μονάδες 5

Δ4. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha\in(0,1)$ και $B(\beta,f(\beta))$ δύο υλικά σημεία της C_f τέτοια, ώστε ΑΒ//x΄x.

Αν το τμήμα ΑΒ αυξάνει το μήκος του με ρυθμό 1cm/sec, να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ανυψώνεται, την χρονική στιγμή που απέχει 1cm από τον άξονα x΄x.

μονάδες 6

Δ5. Να βρείτε σημείο της C_f με τετμημένη στο διάστημα $(0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 7

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Askisopolis

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

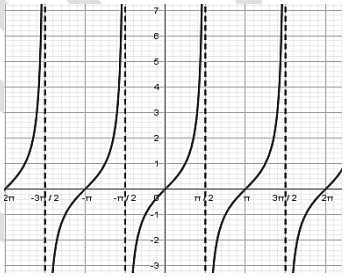
Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Α3. α) Ψευδής



β) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ έχει

ασύμπτωτες τις ευθείες τις μορφής $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Η f ορίζεται όταν $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ έχουμε:

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} / e^x\neq -1 \text{ ισχύει}\}=\mathbb{R}.$$

Είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{e^x}{e^x+1}$.

Β2. $\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{\cancel{e^x\cdot e^x}+e^x-\cancel{e^x\cdot e^x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x)>0 \Rightarrow \varphi\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

Β3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{u\to+\infty}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u}=1$

Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,1)$.

Β3. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\varphi(x)=y,\ y\in(0,1)\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=ye^x+y\Leftrightarrow e^x-ye^x=y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\Leftrightarrow$$

$e^x=\frac{y}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{y}{1-y},\ y\in(0,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\frac{x}{1-x},\ x\in(0,1)$.

Askisopolis

Β5. Είναι $\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)(e^{2x}+e^x-2e^{2x})}{(e^x+1)^4}\Leftrightarrow$

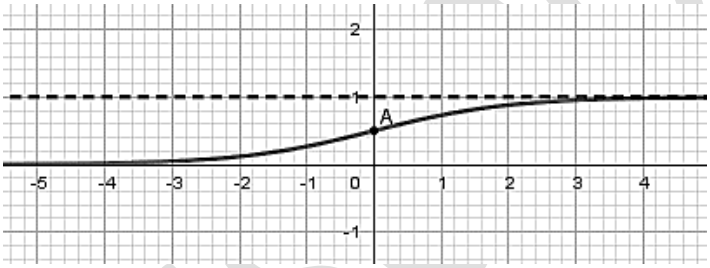
$\varphi''(x)=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

$\varphi''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\geq 0\Leftrightarrow 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi''(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.
Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi''(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Η φ έχει σημείο καμπής το $A(0,\varphi(0))\equiv\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Β6. Επειδή Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$, δηλαδή τον άξονα x΄x.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$.



Θέμα Γ

Γ1. Η ευθεία ΟΒ έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$.
Επειδή διέρχεται από το Β(1,1) είναι λ=1, οπότε ΟΒ: y = x.
Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\gamma$.
Διέρχεται από το Γ(0,1) οπότε $\gamma=1$, από το Α(1,0) οπότε $\lambda+\gamma=0\Leftrightarrow\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$ άρα
$A\Gamma: y=-x+1$.

Γ2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-1$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών, $g(0)=f(0)-1\leq 0$, $g(1)=f(1)+1-1=f(1)\geq 0$ άρα $g(0)g(1)\leq 0$.
Αν $g(0)g(1)<0$,τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\alpha\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\alpha)=0$.
Αν $g(0)g(1)=0\Leftrightarrow g(0)=0$ ή $g(1)=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\alpha=1$
Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένας τουλάχιστον $\alpha\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $g(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=-\alpha+1$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in[0,1]$.
Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών, $h(0)=f(0)\geq 0$, $h(1)=f(1)-1\leq 0$ άρα $h(0)h(1)\leq 0$.
Αν $h(0)h(1)<0$,τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\beta\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\beta)=0$.
Αν $h(0)h(1)=0\Leftrightarrow h(0)=0$ ή $h(1)=0\Leftrightarrow\beta=0$ ή $\beta=1$
Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένας τουλάχιστον $\beta\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $h(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=\beta$.

Γ3. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta-(-\alpha+1)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta+\alpha-1}{\beta-\alpha}<0$

γιατί $\beta<\dfrac{1}{2}$ και $\alpha<\beta<\dfrac{1}{2}$ άρα $\alpha+\beta<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha+\beta-1<0$.

Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

β) Έχουμε την εξίσωση $f'(x)\left(2f(x)-1\right)=2x-1\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-f'(x)-2x+1=0\Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)-f(x)-x^2+x\right)'=0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=f^2(x)-f(x)-x^2+x$, $x\in[\alpha,\beta]$

Η φ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β)

με $\varphi'(x)=2f(x)f'(x)-f'(x)-2x+1$

$\varphi(\alpha)=f^2(\alpha)-f(\alpha)-\alpha^2+\alpha=(-\alpha+1)^2-(-\alpha+1)-\alpha^2+\alpha=\alpha^2-2\alpha+1+\alpha-1-\alpha^2+\alpha=0$

και $\varphi(\beta)=f^2(\beta)-f(\beta)-\beta^2+\beta=\beta^2-\beta-\beta^2+\beta=0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\left(2f(\xi)-1\right)=2\xi-1$

Γ4. Έστω $M(x,f(x))$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε η απόσταση από το σημείο Γ(0,1) δίνεται από την συνάρτηση $d=d(x)=\sqrt{x^2+\left(f(x)-1\right)^2}$, $x\in[0,1]$. Η d είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως ρίζα αθροίσματος συνεχών συναρτήσεων, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα υπάρχει κάποιο $x_1\in[0,1]$ για το οποίο η d θα πάρει την ελάχιστη τιμή της και κάποιο $x_2\in[0,1]$ για το οποίο η d θα πάρει την μέγιστη τιμή της.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)=\ln^2 x\Leftrightarrow|f(x)|=|\ln x|$

$f(x)=0\Leftrightarrow|\ln x|=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

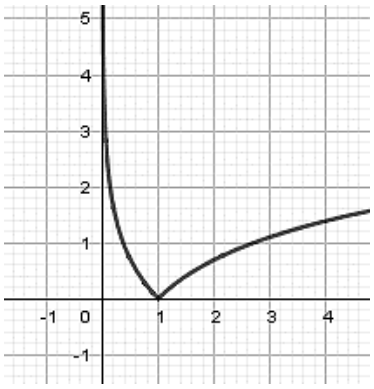
Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Αν $x\in(0,1)$, τότε $|f(x)|=-\ln x\Leftrightarrow f(x)=\pm\ln x$ και αν $x\in(1,+\infty)$, τότε $|f(x)|=\ln x\Leftrightarrow f(x)=\pm\ln x$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ -\ln x, & x>1\end{cases}=-\ln x,\ x>0$ ή $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=|\ln x|,\ x>0$ ή

$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ -\ln x, & x>1\end{cases}=-|\ln x|,\ x>0$ ή $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=\ln x,\ x>0$

Δ2. Είναι $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=|\ln x|$, $x>0$, οπότε η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της $y=-\ln x$ στο διάστημα $(0,1)$ και από το τμήμα της $y=\ln x$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.



Δ3. Για $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{x}<0$ και για $x>1$ είναι $f'(x)=\frac{1}{x}>0$.

Αρκεί να βρούμε σημεία $\Gamma(x_1,f(x_1))$, $\Delta(x_2,f(x_2))$ με $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

Αν $x_1,x_2\in(0,1)$ ή $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)>0$, οπότε για να είναι $f'(x_1)f'(x_2)=-1$ πρέπει $x_1\in(0,1)$ και $x_2>1$. Τότε $f'(x_1)f'(x_2)=-1\Leftrightarrow-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1\Leftrightarrow x_1x_2=1\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{x_2}$.

Αν $x_2=2$ τότε $x_1=\frac{1}{2}$, οπότε δύο τέτοια σημεία είναι τα $\Gamma\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$, $\Delta(2,\ln 2)$

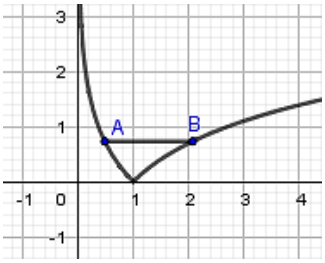
ή

$f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f'(2)=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$ οπότε οι εφαπτομένες στα σημεία $\Gamma\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$, $\Delta(2,\ln 2)$ είναι κάθετες.

Δ4. Επειδή ΑΒ//x΄x είναι

$f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow-\ln\alpha=\ln\beta\Leftrightarrow 0=\ln\alpha+\ln\beta\Leftrightarrow\ln(\alpha\beta)=0\Leftrightarrow\alpha\beta=1\Leftrightarrow$

$\beta=\frac{1}{\alpha}$. Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $d=x_B-x_A=\frac{1}{\alpha}-\alpha$, $\alpha\in(0,1)$.



Είναι $d(t)=\frac{1}{\alpha(t)}-\alpha(t)$, $t\geq 0$

Επειδή το τμήμα ΑΒ αυξάνει το μήκος του με ρυθμό 1cm/sec, είναι $d'(t)=1\text{cm}/\sec$.

Η απόσταση των σημείων Α, Β από τον άξονα x΄x είναι $y=-\ln\alpha$.

Αν t_0 η χρονική στιγμή που τα σημεία Α, Β απέχουν 1 cm από τον άξονα x΄x, τότε

$-\ln\alpha(t_0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha(t_0)}=e\Leftrightarrow\alpha(t_0)=\frac{1}{e}$.

Είναι $d'(t)=\left(\frac{1}{\alpha(t)}-\alpha(t)\right)'=-\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}-\alpha'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

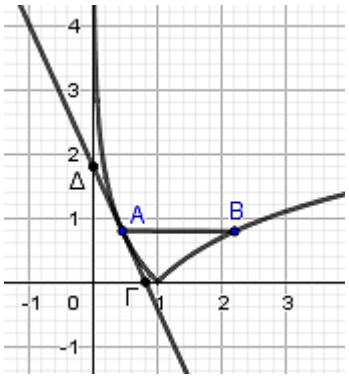
$d'(t_0)=-\frac{\alpha'(t_0)}{\alpha^2(t_0)}-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow 1=-\frac{\alpha'(t_0)}{\frac{1}{e^2}}-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow 1=-e^2\alpha'(t_0)-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow$

$\alpha'(t_0)(-e^2-1)=1\Leftrightarrow\alpha'(t_0)=\frac{1}{-e^2-1}$. Είναι $y(t)=-\ln\alpha(t)$, $y'(t)=-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$y'(t_0)=-\frac{\alpha'(t_0)}{\alpha(t_0)}=-\frac{\frac{1}{-e^2-1}}{\frac{1}{e}}=\frac{e}{e^2+1}\text{cm}/\sec$$

Askisopolis

Δ5. Επειδή $\alpha \in (0,1)$ θα θεωρήσουμε την εφαπτομένη ε της C_f στο Α.



Είναι

ε: $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y + \ln\alpha = -\frac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha}x + 1 - \ln\alpha$

Για $y = 0$ είναι $x = \alpha(1-\ln\alpha)$ και για $x = 0$ είναι $y = 1-\ln\alpha$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(\alpha(1-\ln\alpha),0)$ και $\Delta(0,1-\ln\alpha)$.

Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΓΔ είναι

$$E = \frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \frac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)(1-\ln\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)^2.$$

Έστω $E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)^2$, $\alpha \in (0,1)$.

Είναι $E'(\alpha) = \frac{1}{2}\left[(1-\ln\alpha)^2 + 2\alpha(1-\ln\alpha)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right] = \frac{1}{2}(1-\ln\alpha)(1-\ln\alpha-2) = \frac{1}{2}(1-\ln\alpha)(-1-\ln\alpha)$

$E'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\ln\alpha)(-1-\ln\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow -1-\ln\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \ln\alpha \leq -1 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{e}$.

Για κάθε $\alpha \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $E'(\alpha) > 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ είναι $E'(\alpha) > 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $\alpha = \frac{1}{e}$, τότε $A\left(\frac{1}{e},1\right)$.

Askisopolis