Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026

Αντώνης Βαλέργας **Γαβριήλ Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς **Νίκος Κουμάντος**
Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**
Θανάσης Νικολόπουλος **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Δημήτρης Πατσιμάς **Νίκος Σαμπάνης**
Βαγγέλης Τόλης **Νίκος Τούντας** **Ισαάκ Χιονίδης**

9ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 4ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

7 μονάδες

Α2. Πότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

4 μονάδες

Α3. Πότε μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ έχει αντίστροφη; Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f .

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f\circ g\neq g\circ f$.

β) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

γ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ) Ισχύει ο τύπος $(3^x)'=x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

4 μονάδες

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

4 μονάδες

Β3. Να αποδείξετε ότι $f''(x)=-\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ (2 μονάδες) και στην συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (4 μονάδες).

6 μονάδες

Ασκησόπολις

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\dfrac{\eta\mu x}{x^3}\right)$.

5 μονάδες

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας $y=x$, του άξονα $y'y$ και της ευθείας $x=1$.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x)=2\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης φ και το σύνολο τιμών της.

6 μονάδες

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)^2\ln x$.

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

5 μονάδες

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

5 μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(\pi)+f(e)<f(e-1)+f(\pi+1)$.

5 μονάδες

Γ5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(x-1)\cdot\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επιπλέον τρία σημεία της C_f τα $A(x_1,f(x_1)), B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ με $x_1<x_2<x_3$. Αν οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες μεταξύ τους τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε: $f'(\rho)=0$.

7 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία και η ΒΓ με τον $x'x$ οξεία γωνία.

5 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(2x-\rho)=2f(\rho)$., όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$

7 μονάδες

Δ4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

6 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Ασκησόπολις

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$.

Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο τα ης f.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Α3. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε έχει αντίστροφη.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A)\to\mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

– ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. 1ος τρόπος: Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\alpha x^3}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3}{x^3+x}\overset{\alpha\neq0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=\alpha$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^3}{x^2+1}-\alpha x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\alpha x^3}-\cancel{\alpha x^3}-\alpha x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\alpha x}{x^2+1}\overset{\alpha\neq0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\alpha\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$

Άρα η ευθεία $y=\alpha x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, επομένως είναι $\alpha=1$.

2ος τρόπος: Αφού η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^3}{x^2+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3-x^3-x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3-x}{x^2+1}=0 \quad (1)$$

Αν $\alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$ τότε $(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=0 \Leftrightarrow \pm\infty=0$ αδύνατο.

Για $\alpha=1$ είναι $(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ ισχύει. Άρα τελικά $\alpha=1$.

B2. Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\geq 0$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Άρα αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ τότε $f\nearrow\mathbb{R}$.

B3. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\left[\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right]'=$

$$=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[(4x^3+6x)(x^2+1)-(x^4+3x^2)\cdot 4x\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^5}+4x^3+6x^3+6x-\cancel{4x^5}-12x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-2x$		+		+	0	−		−	
x^2-3		+	0	−		−	0	+	
$(x^2+1)^3$		+		+		+		+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
f		∪		∩		∪		∩	
			Σ.Κ		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-\sqrt{3}]$ και $f''(x)>0$ στο $(-\infty,-\sqrt{3})$ άρα $f\cup(-\infty,-\sqrt{3}]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-\sqrt{3},0]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\sqrt{3},0)$ άρα $f\cap[-\sqrt{3},0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\sqrt{3}]$ και $f''(x)>0$ στο $(0,\sqrt{3})$ άρα $f\cup[0,\sqrt{3}]$.

Η f είναι συνεχής στο $[\sqrt{3},+\infty)$ και $f''(x)<0$ στο $(\sqrt{3},+\infty)$ άρα $f\cap[\sqrt{3},+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=-\sqrt{3}$, για $x=0$ και για $x=\sqrt{3}$.

Τα σημεία καμπής είναι τα $A\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $O(0,0)$ και $B\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ αφού

$$f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2+1}=\frac{-3\sqrt{3}}{4},\ f(0)=\frac{0^3}{0^2+1}=0 \text{ και } f(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2+1}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ασκησόπολις

B4. Για κάθε $x>0$ είναι:

$$\left|f(x)\frac{\eta\mu x}{x^3}\right|=\left|\frac{\cancel{x^3}}{x^2+1}\cdot\frac{\eta\mu x}{\cancel{x^3}}\right|=\left|\frac{\eta\mu x}{x^2+1}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2+1}\le f(x)\frac{\eta\mu x}{x^3}\le\frac{1}{x^2+1}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\frac{\eta\mu x}{x^3}\right)=0$.

B5. Έστω $g(x)=f(x)-x=\frac{x^3}{x^2+1}-x=\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}-x}{x^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $g(x)\le0$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_0^1|g(x)|dx=-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln2-\ln1)=\frac{\ln2}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη, με

$\varphi'(x)=\left(2\ln x+\frac{x-1}{x}\right)'=\left(2\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$ άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επιπλέον είναι $\varphi(1)=0$ άρα:

- Για $x>1\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)>\varphi(1)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$ και
- Για $0<x<1\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)<\varphi(1)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$.

Συνεπώς είναι $\varphi(x)>0$ για $x\in(1,+\infty)$ και $\varphi(x)<0$ για $x\in(0,1)$.

Ακόμη:

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\ln x+1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln x+1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ είναι το $\varphi((0,+\infty))\overset{\varphi\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left[(x-1)^2\ln x\right]'=2(x-1)\ln x+(x-1)^2\cdot\frac{1}{x}=(x-1)\cdot\left(2\ln x+\frac{x-1}{x}\right)=(x-1)\varphi(x).$$

- Για $x\ge1$ είναι $x-1\ge0$ και $\varphi(x)\ge0$, άρα $f'(x)\ge0$ με το "=" να ισχύει μόνο για $x=1$.
- Για $0<x<1$ είναι $x-1<0$ και $\varphi(x)<0$, άρα $f'(x)>0$.

Συνεπώς $f'(x)\ge0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με το "=" να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

1ος τρόπος

$$f''(x)=\left[(x-1)\varphi(x)\right]'=\varphi(x)+(x-1)\varphi'(x)=2\ln x+1-\frac{1}{x}+(x-1)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=2\ln x+1-\cancel{\frac{1}{x}}+2+\cancel{\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=2\ln x+3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2},\ x>0.$$

Είναι $f^{(3)}(x)=\left(2\ln x+3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επιπλέον $f''(1)=2\ln 1+3-2-1=0$, και:

- Για $x>1 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(1)\Leftrightarrow f''(x)>0$
- Για $0<x<1 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(1)\Leftrightarrow f''(x)<0$

2ος τρόπος

$f''(x)=\left[(x-1)\varphi(x)\right]'=\varphi(x)+(x-1)\varphi'(x)$ Οπότε $f''(1)=0$, για x>1 είναι $f''(x)>0$ και για 0<x<1 $f''(x)<0$ (από Γ1)

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,1]$, κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(1,f(1))$ ή $(1,0)$.

Γ4. 1ος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα είναι συνεχής στα διαστήματα $[e-1,e]$, $[\pi,\pi+1]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(e-1,e)$ και $(\pi,\pi+1)$. Συνεπώς ισχύουν για την f οι υποθέσεις του ΘΜΤ στα διαστήματα $[e-1,e]$ και $[\pi,\pi+1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(e-1,e)$ και $\xi_2\in(\pi,\pi+1)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(e)-f(e-1)}{e-(e-1)}=f(e)-f(e-1) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(\pi+1)-f(\pi)}{(\pi+1)-\pi}=f(\pi+1)-f(\pi).$$

Είναι $1<e-1<\xi_1<e<\pi<\xi_2<\pi+1$ άρα $\xi_1,\xi_2\in(1,+\infty)$ με $\xi_1<\xi_2$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε:

$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(e)-f(e-1)<f(\pi+1)-f(\pi)\Leftrightarrow f(e)+f(\pi)<f(e-1)+f(\pi+1)$.

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x+1)-f(x)$, με x>1 , τότε $h'(x)=f'(x+1)-f'(x)>0$ (αφού $f''(x)>0$ για x>1 οπότε είναι γνησίως αύξουσα και άρα $1<e-1<\pi \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(e-1)<h(\pi)\Leftrightarrow$

$f(e)-f(e-1)<f(\pi+1)-f(\pi)\Leftrightarrow f(e)+f(\pi)<f(e-1)+f(\pi+1)$

Γ5. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E=\int_1^e\left|(x-1)\varphi(x)\right|dx$. Από το ερώτημα **(β)** έχουμε $(x-1)\varphi(x)\geq 0$ για $x\in[1,+\infty)$, συνεπώς:

$$E=\int_1^e\left|(x-1)\varphi(x)\right|dx=\int_1^e(x-1)\varphi(x)dx=\int_1^e f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^e=$$
$$=f(e)-f(1)=(e-1)^2\ln e-(1-1)^1\ln 1=(e-1)^2.$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f'\nearrow\mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Από υπόθεση $AB\perp B\Gamma$ συνεπώς $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=-1$ (1)

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα (x_1,x_2) και (x_2,x_3) οπότε από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει $\rho_1\in(x_1,x_2)$: $f'(\rho_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (2) και

υπάρχει $\rho_2\in(x_2,x_3)$: $f'(\rho_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (3)

Η $(1)\overset{(2)(3)}{\Leftrightarrow}$ $f'(\rho_1)\cdot f'(\rho_2)=-1<0$ και f' συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\rho)=0$ και επειδή $f'\nearrow\mathbb{R}$ η ρίζα ρ μοναδική της $f'(x)=0$.

Δ2. Είναι $\rho\in(\rho_1,\rho_2)\Leftrightarrow\rho_1<\rho<\rho_2\overset{f'\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}f'(\rho_1)<f'(\rho)<f'(\rho_2)\overset{\Delta1}{\Leftrightarrow}f'(\rho_1)<0<f'(\rho_2)$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον $x'x$ με $\omega\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

τότε $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{AB}=f'(\rho_1)<0$ οπότε η ευθεία AB σχηματίζει με τον $x'x$ αμβλεία γωνία.

Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $B\Gamma$ με τον $x'x$ με $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

τότε $\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{B\Gamma}=f'(\rho_2)>0$ οπότε η ευθεία $B\Gamma$ σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία.

Δ3. Αν $x\in(-\infty,\rho)$ τότε: $x<\rho\overset{f'\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\rho)\overset{\Delta1}{\Leftrightarrow}f'(x)<0$

Αν $x\in(\rho,+\infty)$ τότε: $x>\rho\overset{f'\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(\rho)\overset{\Delta1}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$

Συνεπώς επειδή:

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\rho)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\rho]$, η $f\searrow(-\infty,\rho]$.

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\rho,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[\rho,+\infty)$, η $f\nearrow[\rho,+\infty)$.

Επομένως η f στη θέση $x=\rho$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\rho)$.

Αν $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)+f(2x-\rho)=2f(\rho)\Leftrightarrow[f(x)-f(\rho)]+[f(2x-\rho)-f(\rho)]=0$ (4)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)\geq f(\rho)$ (5) με την ισότητα για $x=\rho$, δηλαδή $f(x)=f(\rho)\Leftrightarrow x=\rho$ (6)

συνεπώς από την (5) έχουμε ότι: $f(2x-\rho)\geq f(\rho)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (7). Επομένως

$(4)\overset{(5)(7)}{\Leftrightarrow}(f(x)-f(\rho)=0)$ και $(f(2x-\rho)-f(\rho)=0)\Leftrightarrow(f(x)=f(\rho))$ και

$(f(2x-\rho)=f(\rho))\overset{(6)}{\Leftrightarrow}(x=\rho)$ και $(2x-\rho=\rho)\Leftrightarrow x=\rho$

Δ4. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,\rho]$ άρα $f(\Delta_1)=\left[f(\rho),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο σημείο $K(\rho_1,f(\rho_1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y=f'(\rho_1)(x-\rho_1)+f(\rho_1)$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f\cup\mathbb{R}$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε_1) με εξαίρεση το σημείο επαφής $K(\rho_1,f(\rho_1))$, δηλαδή $f(x)\geq f'(\rho_1)(x-\rho_1)+f(\rho_1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f'(\rho_1)(x-\rho_1)+f(\rho_1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}f'(\rho_1)x\overset{f'(\rho_1)<0}{=}+\infty$ Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, συνεπώς $f(\Delta_1)=[f(\rho),+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[\rho,+\infty)$ άρα $f(\Delta_2)=\left[f(\rho),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Η εφαπτομένη (ε_2) της C_f στο σημείο $\Lambda(\rho_2,f(\rho_2))$ έχει εξίσωση $\varepsilon_2: y=f'(\rho_2)(x-\rho_2)+f(\rho_2)$

Η $f\cup\mathbb{R}$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε_2) με εξαίρεση το σημείο επαφής $\Lambda(\rho_2,f(\rho_2))$, δηλαδή $f(x)\geq f'(\rho_2)(x-\rho_2)+f(\rho_2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(\rho_2)(x-\rho_2)+f(\rho_2)\right]=\lim_{x\to+\infty}f'(\rho_2)x\overset{0<f'(\rho_2)}{=}+\infty$$

Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, συνεπώς $f(\Delta_2)=[f(\rho),+\infty)$

Συνεπώς $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[f(\rho),+\infty)$.

Ασκησόπολις