Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

μονάδες 7

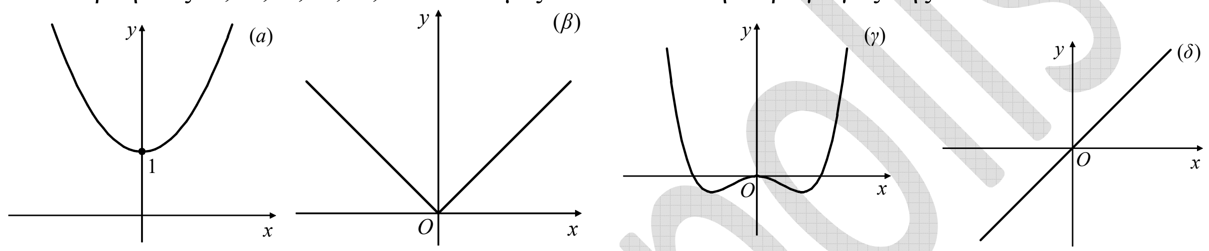
Α2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

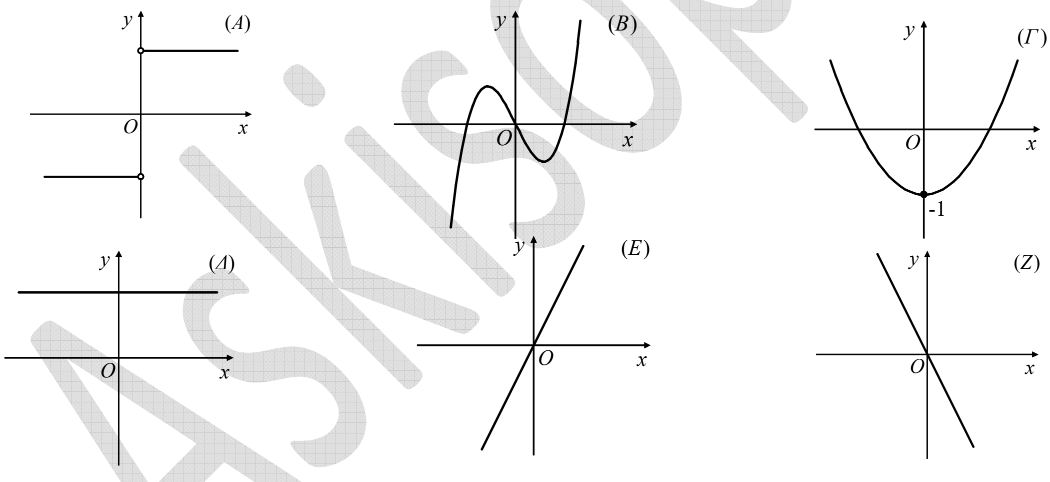
μονάδες 4

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη τον πίνακα:

α	β	γ	δ

στον οποίο θα αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β) Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε:

i. $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ **ii.** $(f\circ g)(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$

γ) Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$.

μονάδες 2+2+2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x-\ln(x+1)+2x-1, x>-1$.

B1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

B2. Αν $x_2\in(-1,x_1)$ και $x_3\in(x_1,0]$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$,να βρείτε το x_3 και να προσδιορίσετε το πρόσημο του ακρότατου της f.

μονάδες 4

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$.

μονάδες 6

B4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα y΄y, εφάπτεται και στην $h(x)=e^{x-1}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

B5. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της C_f στο 1ο τεταρτημόριο στα οποία οι εφαπτομένες να είναι κάθετες.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\eta\mu x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και $h(x)=\sigma\upsilon\nu x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Να δείξετε ότι $|g(x)-xh(x)|\le 1$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $\beta g(\alpha)>\alpha g(\beta)$ για κάθε $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. μονάδες 5

Γ3. Να ορίσετε την συνάρτηση $f(x)=(g\circ h)(x)+(h\circ g)(x)$ και να βρείτε την μονοτονία της.

μονάδες 3 +5

Γ4. Αν $\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)<\varepsilon\varphi 1$ και $\sigma\upsilon\nu 1<\frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}\right)+f(x)=1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x)f(x)+g'(x)g(x)=g'(2x),\ x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0,\ g(0)=1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f^2(x)+g^2(x)=g(2x),\ x\in\mathbb{R}$. μονάδες 5

Δ2. Αν $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, να βρείτε ποια μπορεί να είναι η f. μονάδες 8

Δ3. Έστω $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $g(kx^2)-g(kx^4)>k\left(g(x^2)-g(x^4)\right),\ k>1$. μονάδες 6

6ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό ελάχιστο;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

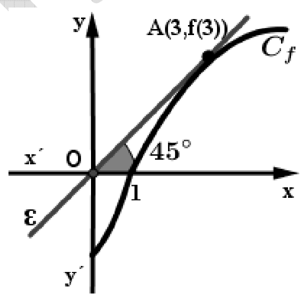
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 4

Α4. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της ε, στο σημείο $A(3,f(3))$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=x^2-\dfrac{9}{x}$, $x\neq 0$. Να υπολογίσετε:



α) Τα $f(3)$, $f'(3)$ μονάδες 3

β) τα $(f\circ f)'(3)$, $g(f(3))$, $(g\circ f)'(3)$ μονάδες 3

γ) Τα $(g+f)'(3)$, $(g\cdot f)'(3)$ μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x-\alpha}$, $\beta<\gamma+1$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)=0$

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=-1,\beta=1$. μονάδες 6

Β2. α) Να δείξετε ότι $(f\circ g)(x)=\dfrac{x^2+3x+\gamma+2}{x+2}, x\neq -2,$ όπου $g(x)=x+1$.

β) Αν η γραφική παράσταση της $f\circ g$ τέμνει τον y΄y στο σημείο $B\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$, να βρείτε τον τύπο της f.

μονάδες 3+2

Αν $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$:

Β3. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1,0)$.

μονάδες 5

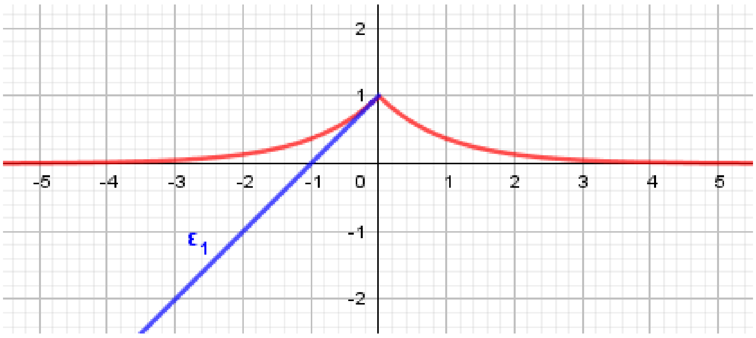
Β4.α) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

μονάδες 3+3

Θέμα Γ

Έστω η άρτια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to (0,1]$,συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $a:(-\infty,0] \to \mathbb{R}$ με $a(x) = f(x),\ x \le 0$ και $b:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $b(x) = f(x),\ x \ge 0$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία ε_1 που είναι εφαπτομένη της a στο σημείο $A(0,1)$.

Γ1. Να βρείτε την εφαπτομένη ημιευθεία ε_2 της C_b στο $A(0,1)$ για $x \ge 0$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η g είναι παραγωγίσιμη. μονάδες 7

Γ2. Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. μονάδες 4

Γ3.Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες και στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης. μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi-1) + \xi f'(\xi-1) + 1 = 4\xi$. μονάδες 5

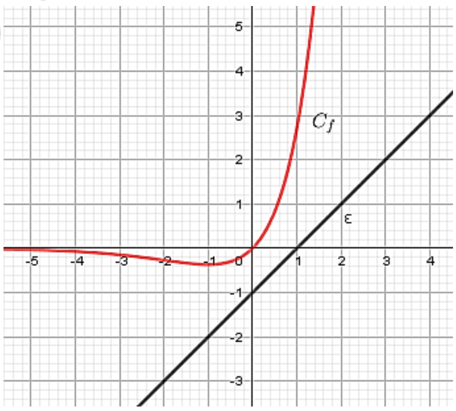
Γ5.Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\eta\mu f(x) - f(x)}$. μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 2xf(x) + x^2e^x(e^x - 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e$, $f(-2) = -\dfrac{2}{e^2}$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x$,$x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 9

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε.



Δ2. Να βρείτε την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ε. Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ε. Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι : $e^6 < \dfrac{5 \cdot e^5 + 7 \cdot e^7}{12}$. Μονάδες 5

7ο Διαγώνισμα

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 7

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ;

μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

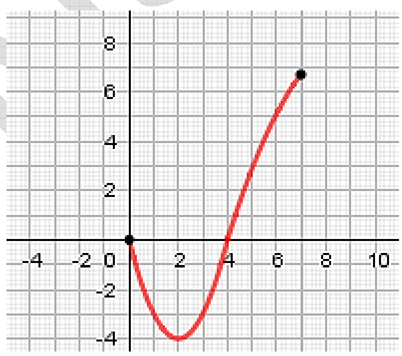
α) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$.

β) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

γ) Αν $f(x)\le M$ για κάθε $x\in D_f$, τότε η f έχει μέγιστο το Μ.

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[0,7]$.



Αν η C_f διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και ισχύουν οι σχέσεις $f(2)-f(0)=f(4)-f(2)=-3$ και $f(7)-f(4)=5$,τότε:

Β1. Να βρείτε τα $f(2),f(4),f(7)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=-10^{-2020}$.

μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

μονάδες 3

Β3. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f, καθώς και το σύνολο τιμών της.

μονάδες 7

Β4 .Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{xe^{-x}}{f(x)+6}$. μονάδες 4

Β5. Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,7]$ με $g'(x)=f'(x)+2x+1$ για κάθε $x\in[0,7]$ και $g(2)=5$. Να δείξετε ότι για την συνάρτηση h με $h(x)=g(x)-f(x)$ ισχύει ότι $h(x)=x^2+x+2$, $x\in[0,7]$

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+\beta^x}$ με $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$

Γ1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(\lambda,\lambda)$ με $\lambda\in(0,3)$.

μονάδες 5

Γ2. Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y = x και σε ένα ακόμη σημείο με τετμημένη $\mu>3$, να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 6

Γ3. Έστω $\alpha<\beta$.

α) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\alpha^x+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\beta^x=(\alpha^x+\beta^x)\ln x$ είναι αδύνατη.

μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κρίσιμα σημεία.

μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, F για τις οποίες ισχύει :

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0-h)}{h}=2f(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0.
- $F(1)=0=F(2),\ F(3)=2=F(4),\ F'(5)=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{F(x)+1}{x-2}+\dfrac{F(x+2)+2}{x-1}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

μονάδες 5

Δ2. .Να δείξετε ότι $F'(x)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

μονάδες 4

Δ3. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$.Να δείξετε ότι $f(3)<2<f(2)$.

μονάδες 4

Δ4. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

μονάδες 4+3

Δ5. Έστω $f(x)\le(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2$ όπου α, β $\neq 5$ δύο από τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Δ4α. Να δείξετε ότι ο άξονας x΄x εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(\alpha,0),B(\beta,0)$ και $\Gamma(5,0)$.

μονάδες 5

8ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 5

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μια συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$ τότε η f θα έχει υποχρεωτικά ή ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή.

β) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

γ) Αν η f είναι περιοδική με περίοδο Τ τότε η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

μονάδες 6

Α4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση μιας τυχαίας συνάρτησης που να ικανοποιεί την αντίστοιχη πρόταση.

α) Συνάρτησης που να είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ και να μην ισχύει το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.

β) Μιας συνάρτησης αντιστρέψιμης και της αντίστροφή της στο ίδιο σύστημα αναφοράς που έχουν και κοινά σημεία που δεν ανήκουν πάνω στην ευθεία $y=x$.

γ) Συνάρτησης που να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και όμως να ισχύει το αποτέλεσμα του θεωρήματος του Rolle στο [α,β].

δ) Μιας συνάρτησης, που να είναι $f(x)<0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Συναρτήσεων που να έχουν την ίδια παράγωγο ενώ οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

μονάδες 10

Θέμα Β

Μια νέα γεώτρηση εξόρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο $R'(t)=20+10t-\frac{3}{4}t^2$, όπου $R(t)$ είναι ο αριθμός, σε χιλιάδες, των βαρελιών που αντλήθηκαν στους t πρώτους μήνες λειτουργίας της.

Β1. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της.

μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός άντλησης του πετρελαίου γίνεται μέγιστος.

μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή t_0 στο πρώτο χρόνο λειτουργίας της γεώτρησης, κατά την οποία ο ρυθμός άντλησης είναι 30.000 βαρέλια το μήνα.

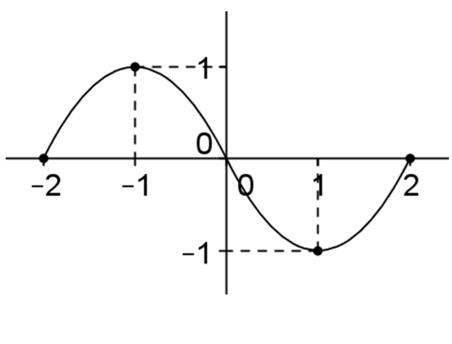
μονάδες 8

Β4. Να δείξετε ότι σε λιγότερο από δύο χρόνια θα έχει εξορυχτεί το σύνολο του πετρελαίου της συγκεκριμένης εξόρυξης.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της παραγωγίσιμης συνάρτησης f, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-2,2]$.



Για τη συνάρτηση f επίσης δίνεται ότι :

- Η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη τον άξονα x΄x.
- Το $-f(2)$ είναι η θέση μεγίστου του εμβαδού $E(x)$ ενός ορθογωνίου που έχει σταθερή περίμετρο 8.

- Το $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)+1}{x+1}=\alpha\in\mathbb{R}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- Η παράγωγος είναι περιττή.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

μονάδες 4

Γ2.Να δείξετε ότι $f(-2)=f(2)=-2$

μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι **:**

α) $f(-1)=f(1)=-1$ και να βρείτε το α.

β) $f(0)=0$

μονάδες 3+2

Γ4. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο **:** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu f(x)\cdot\frac{e^{-\frac{1}{f(x)}}+7\cdot 2^{-\frac{1}{f(x)}}}{5\cdot e^{-\frac{2}{f(x)}}-2^{-\frac{3}{f(x)}}}\cdot\frac{5\cdot\ln(-f(x))-1}{7f(x)\cdot\ln(-f(x))-f(x)}\right]$**.**

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)+x^2+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, $f(0)=1$ και $f(\pi)=\pi-1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0,\pi]$.

μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το σημείο της C_f με τετμημένη στο διάστημα $[0,\pi]$, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τη μικρότερη κλίση.

μονάδες 3

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 3x-2\pi-1$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

μονάδες 5

Δ5. Έστω ότι $f(x)=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

μονάδες 3

Λύσεις 5ου διαγωνίσματος

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

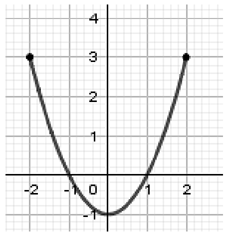
Α2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\ne x_2$, τότε $f(x_1)\ne f(x_2)$.

Α3.

α	β	γ	δ
Ε	Α	Β	Δ

Α4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως $f(-2)=3,\ f(2)=3$ και $f(-2)f(2)>0$



Α5. α) Σ β) i. Λ ii. Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}+2,\ x>-1$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^x-\dfrac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ άρα κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $\gamma\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right): f'(\gamma)<0$ και επίσης ισχύει $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}>0$ άρα έχουμε $f'(\gamma)f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in \left(0,-\frac{1}{2}\right): f'(x_1)=0$ και επειδή $f' \nearrow$ στο $(-1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1<x\le x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\le f'(x_1)=0$ και για $x\ge x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge f'(x_1)=0$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνον για $x=x_1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=x_1$ τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\quad -1$	$\qquad$ x_1	$+\infty$
f'	$\Vert$ $\quad -$	0	$+$
f	$\Vert$ $\quad \searrow$		$\nearrow$
		O.E.	

H f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_1$ το $K(x_1,f(x_1))$.

2ος τρόπος

H f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}+2, x>-1$.

H f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=+\infty-0+2=+\infty$ οπότε $f'(A)=(-\infty,+\infty)$.

Το $0\in f(A)$ οπότε υπάρχει $x_1\in A_{f'}: f'(x_1)=0$ και επειδή $f' \nearrow$ στο $(-1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1<x\le x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\le f'(x_1)=0$ και για $x\ge x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge f'(x_1)=0$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνον για $x=x_1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=x_1$ τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$ $\quad -1$	$\qquad$ x_1	$+\infty$
f'	$\Vert$ $\quad -$	0	$+$
f	$\Vert$ $\quad \searrow$		$\nearrow$
		O.E.	

H f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_1$ το $K(x_1,f(x_1))$.

B2. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,x_1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1,+\infty)$ τότε προφανώς τα $x_2\in(-1,x_1)$ και $x_3\in(x_1,0]$ είναι οι μοναδικές ρίζες της f και συγκεκριμένα η $x_2\in(-1,x_1)$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,x_1]$ και η $x_3\in(x_1,0]$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα $[x_1,+\infty)$.

Στο διάστημα $\left[x_1,+\infty\right)$ η f έχει προφανή ρίζα το μηδέν άρα ισχύει ότι $x_3=0$.

Επίσης επειδή η f είναι συνεχής και έχει δύο μοναδικές ρίζες τότε μεταξύ των ριζών θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Το $-\frac{1}{2}\in\left(x_2,x_3\right)$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}+\ln 2-1-1<0$ γιατί έχουμε:

$\frac{1}{\sqrt{e}}-1<0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{e}}<1\Leftrightarrow\sqrt{e}>1$ που ισχύει και $\ln 2-1<0\Leftrightarrow\ln 2<1\Leftrightarrow 2<e$ ισχύει.

Άρα στο διάστημα $\left(x_2,x_3\right)$ ισχύει ότι $f\left(x\right)<0$ και $x_1\in\left(x_2,x_3\right)$ άρα $f\left(x_1\right)<0$.

B3. Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο διάστημα $\left[x,x+1\right]$ και έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in\left(x,x+1\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(x+1\right)-f\left(x\right)}{x+1-x}=f\left(x+1\right)-f\left(x\right)$$

1ος τρόπος: Από B1 η $f'\nearrow$ στο $\left(-1,+\infty\right)$ και έχουμε:

$$x<\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'\left(x\right)<f'\left(\xi\right)<f'\left(x+1\right)\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{x+1}+2<f\left(x+1\right)-f\left(x\right)<e^{x+1}-\frac{1}{x+2}+2$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+1}-\frac{1}{x+2}+2\right)=+\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x+1\right)-f\left(x\right)\right]=+\infty$

2ος τρόπος: Ισχύει $x<\xi<x+1$ δηλαδή αφού το ξ εξαρτάται από το x έστω $\xi=\xi\left(x\right)$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1\right)=+\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi\left(x\right)=+\infty$ άρα όταν το $x\to+\infty$ τότε $\xi\to+\infty$ άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x+1\right)-f\left(x\right)\right]=\lim_{\xi\to+\infty}f'\left(\xi\right)=\lim_{\xi\to+\infty}\left(e^{\xi}-\frac{1}{\xi+1}+2\right)=+\infty$$

3ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x+1\right)-f\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+1}-\ln\left(x+2\right)+2x+2-1-e^x+\ln\left(x+1\right)-2x+1\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^x\left(e-1\right)+\ln\frac{x+1}{x+2}+2\right)\right]=+\infty+0+2=+\infty \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x+2}\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to1\\ u\to1}}{\overset{u=\frac{x+1}{x+2}}{=}}\lim\ln u=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

B4. Επειδή $f\left(0\right)=0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η εφαπτομένη της C_f στο $O\left(0,0\right)$ είναι η ευθεία ε: $y=f'\left(0\right)x\Leftrightarrow y=2x$.

Για να εφάπτεται η ε στη C_h, αρχικά πρέπει να υπάρχει σημείο $x_4\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'\left(x_4\right)=2$.

Είναι $h'\left(x\right)=e^{x-1}+1$. Παρατηρούμε ότι $h'\left(1\right)=2$. Η εφαπτομένη της C_h στο $x=1$ έχει εξίσωση $y-h\left(1\right)=h'\left(1\right)\left(x-1\right)\Leftrightarrow y-2=2x-2\Leftrightarrow y=2x$, δηλαδή είναι η ε.

B5. Αρκεί να υπάρχουν $x_5,x_6>0$ τέτοια, ώστε $f'\left(x_5\right)f'\left(x_6\right)=-1$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x>0$ είναι $f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=2$, άρα $f'\left(x_5\right)f'\left(x_6\right)>0$ και δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $\varphi\left(x\right)=g\left(x\right)-xh\left(x\right)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\varphi'\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x$.

Για $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και για $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $\eta\mu x < 0 \Rightarrow x\eta\mu x > 0$ άρα $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le \varphi(x) \le \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \le \varphi(x) \le 1 \Leftrightarrow |\varphi(x)| \le 1$

Γ2. $\beta g(\alpha) > \alpha g(\beta) \Leftrightarrow \beta\eta\mu\alpha > \alpha\eta\mu\beta \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \frac{\eta\mu\beta}{\beta}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $t'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{-\varphi(x)}{x^2}$.

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi(x) > \varphi(0) = 0 \Rightarrow t(x) < 0 \Rightarrow t \searrow \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow t(\alpha) > t(\beta) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \frac{\eta\mu\beta}{\beta} \Leftrightarrow \beta\eta\mu\alpha > \alpha\eta\mu\beta$

Γ3. Έχουμε $D_{g\circ h} = \{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\} = \left\{x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] / \sigma\upsilon\nu x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\} \overset{-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1}{=} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και επίσης

$D_{h\circ g} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_h\} = \left\{x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] / \eta\mu x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\} \overset{-1\le\eta\mu x\le 1}{=} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $D_f = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $f(x) = (g\circ h)(x) + (h\circ g)(x) = g(h(x)) + h(g(x)) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

Μονοτονία της f.

1ος τρόπος (Χωρίς παραγώγους):

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$

- $\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow} \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_1) > \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_2)$ **(3)** γιατί $0 \le \sigma\upsilon\nu x_2 < \sigma\upsilon\nu x_1 \le 1 < \frac{\pi}{2}$
- $\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1) > \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)$ **(4)** γιατί $0 \le \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \le 1 < \frac{\pi}{2}$

$(3)+(4): f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ με

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \underset{-x_1,-x_2\in[0,\pi/2]}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}} f(-x_1) < f(-x_2) \overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

(**ΣΧΟΛΙΟ:** Θα μπορούσαμε όπως δουλέψαμε στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να δουλέψουμε ομοίως και στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ όμως με το δεδομένο ότι είναι άρτια τελειώνουμε πολύ πιο γρήγορα).

Και επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0) = \eta\mu 1 + 1$ είναι ολικό μέγιστο.

2ος τρόπος (Με παραγώγους):

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$f'(x) = -\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)) - \sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu(\eta\mu x)), x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x \in (0,1) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

$\eta\mu(\eta\mu x), \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) \in (0,1) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu(\eta\mu x)), \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)) > 0$ αφού μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς έχουμε γωνίες 1ου τεταρτημορίου άρα ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \underset{-x_1,-x_2 \in [0,\pi/2]}{\overset{f \searrow}{\Rightarrow}} f(-x_1) < f(-x_2) \overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

(**ΣΧΟΛΙΟ:** Θα μπορούσαμε όπως δουλέψαμε στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να δουλέψουμε ομοίως και στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ όμως με το δεδομένο ότι είναι άρτια τελειώνουμε πολύ πιο γρήγορα).

Και επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0) = \eta\mu 1 + 1$ είναι ολικό μέγιστο.

<u>Επίσης το πρόσημο της παραγώγου θα μπορούσε να δειχτεί και με την παρακάτω πιο χρονοβόρα διαδικασία:</u>

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

- $-1 < \eta\mu x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le -\eta\mu x < 1$, $0 < \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\sigma\upsilon\nu x < 0$, $-1 < \eta\mu x \le 0 \overset{\eta\mu x \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x) \le 0$
- $0 < \sigma\upsilon\nu x \le 1 \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\Leftrightarrow} 0 < \sigma\upsilon\nu(1) \le \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) < 1$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 \le \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow -1 < -\eta\mu x \le 0$, $0 < \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\sigma\upsilon\nu x < 0$

- $0 \le \eta\mu x < 1 \overset{\eta\mu x \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x) \ge 0$, $0 < \sigma\upsilon\nu x \le 1 \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\Leftrightarrow} 0 < \sigma\upsilon\nu(1) \le \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) < 1$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$ $+\infty$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$-\eta\mu x$			$+$		$-$	
$-\sigma\upsilon\nu x$			$-$		$-$	
$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$			$+$		$+$	
$\eta\mu(\eta\mu x)$			$-$		$+$	
$-\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))$			$+$		$-$	
$-\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu(\eta\mu x))$			$+$		$-$	
$f'(x)$			$+$		$-$	
$f(x)$			↗		↘	

Γ4. $\ln\left(\dfrac{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}\right) + f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))) - \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))) + f(x) - 1 = 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)))-\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)))+f(x)-1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Θα βρούμε την μονοτονία της g με δύο τρόπους:

1ος τρόπος (Χωρίς Παραγώγους):

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2\Rightarrow$

- $\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow} 0\le \eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le 1<\frac{\pi}{2}\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} 0<\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)<\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)\le 1\overset{\varepsilon\varphi x\nearrow}{\Rightarrow}$

$\overset{\varepsilon\varphi x\nearrow}{\Rightarrow} 0<\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2))<\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1))\le \varepsilon\varphi 1<\frac{\pi}{2}\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)))<\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)))\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)))>\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)))\quad \textbf{(5)}$$

- $\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} 0\le\sigma\upsilon\nu x_2<\sigma\upsilon\nu x_1\le 1<\frac{\pi}{2}\overset{\varepsilon\varphi\nearrow}{\Rightarrow}0\le\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2)<\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1)\le\varepsilon\varphi 1<\frac{\pi}{2}\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}$

$\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} 0<\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1))<\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2))\le 1\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1)))<\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2)))\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1)))>\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2)))\quad\textbf{(6)}$$

- $\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-1>f(x_2)-1\quad\textbf{(7)}$

$(5)+(6)+(7): g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2ος τρόπος (Με Παραγώγους):

$$g'(x)=\frac{(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)))'}{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}-\frac{(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)))'}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}+f'(x)=$$

$$=\frac{\dfrac{-\eta\mu(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}}{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}-\frac{-\eta\mu((\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)))\dfrac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu x)}}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu(\eta\mu x))=$$

$$=-\frac{\eta\mu(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))\cdot\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}-\frac{\eta\mu((\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)))\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))\cdot\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu x)}-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu(\eta\mu x))$$

Ισχύει $g'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ επειδή $x,\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x),\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα επειδή η g είναι

συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $g(0)=\ln(\varepsilon\varphi 1)-\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1))+\eta\mu 1=\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)}\right)+\eta\mu 1>0$ γιατί

$$\varepsilon\varphi 1>\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)}>1\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)}\right)>0 \text{ και } \eta\mu 1>0$$

- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1))+\sigma\upsilon\nu 1-1<0$ γιατί $0<\sigma\upsilon\nu 1<\frac{\pi}{4}\overset{\varepsilon\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1)<1\Leftrightarrow\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1))<0$ και $\sigma\upsilon\nu 1<1$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right): g(x_0)=0$ όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα το xo είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα αυτό.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $2f'(x)f(x)+2g'(x)\,g(x)=2g'(2x) \Leftrightarrow \left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=\left(g(2x)\right)' \Leftrightarrow$

$f^2(x)+g^2(x)=g(2x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ είναι $f^2(0)+g^2(0)=g(0)+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$, οπότε $f^2(x)+g^2(x)=g(2x),\ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Είναι $f^2(x)+g^2(x)=g(2x) \Leftrightarrow f^2(x)+\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \Leftrightarrow$

$$f^2(x)+\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \Leftrightarrow f^2(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{|e^x-e^{-x}|}{2} \quad (1)$$

Η f έχει μοναδική ρίζα το $x=0$ γιατί για $x>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>-x \Leftrightarrow e^x>e^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}>0$ και

για $x<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<-x \Leftrightarrow e^x<e^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}<0$, οπότε για $x\neq 0$ είναι $|f(x)|\neq 0$

ή

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow \dfrac{|e^x-e^{-x}|}{2}=0 \Leftrightarrow e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x=e^{-x} \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Κατά συνέπεια η f ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που οι ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Έτσι έχουμε 4 περιπτώσεις:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
1) $f(x)$	$-$		$+$
2) $f(x)$	$+$		$-$
3) $f(x)$	$+$		$+$
4) $f(x)$	$-$		$-$

Άρα έχουμε για κάθε περίπτωση:

1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\ x\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2},\ x\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{|e^{-x}-e^x|}{2}=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}, & x<0\\[2mm] \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, & x\geq 0\end{cases}$

4) $f(x)=-\dfrac{|e^{-x}-e^x|}{2}=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, & x<0\\[2mm] \dfrac{e^{-x}-e^x}{2}, & x\geq 0\end{cases}$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in A=\mathbb{R}$ έστω $f(x)=y,\ y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=y \Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2y \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x}-1=2ye^x \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 2ye^x + y^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow \left(e^x - y\right)^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow \left|e^x - y\right| = \sqrt{1 + y^2}$

Άλλα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x - y = e^x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, άρα

$e^x - y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$ (2)

Είναι $y^2 < y^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow |y| < \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow -\sqrt{y^2 + 1} < y < \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$

Οπότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$

Οπότε $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = g(kx) - k\,g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = kg'(kx) - k\,g'(x) = k\left(g'(kx) - g'(x)\right)$

Αλλά $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow g''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow g' \nearrow \mathbb{R}$

Οπότε για $x > 0 \overset{(k-1)>0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow (k-1)x > 0 \Leftrightarrow kx > x \overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} g'(kx) > g'(x) \Rightarrow k\left(g'(kx) - g'(x)\right) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$

και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Είναι $g\left(kx^2\right) - g\left(kx^4\right) > k\left(g\left(x^2\right) - g\left(x^4\right)\right)$, $k > 1 \Leftrightarrow$

$g\left(kx^2\right) - kg\left(x^2\right) > g\left(kx^4\right) - kg\left(x^4\right) \Leftrightarrow$

$\varphi\left(x^2\right) > \varphi\left(x^4\right) \overset{\varphi \uparrow [0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x^2 > x^4 \Leftrightarrow x^2 - x^4 > 0 \Leftrightarrow x^2\left(1 - x^2\right) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Λύσεις 6ου διαγωνίσματος

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\dfrac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$ όμως

$$\lim_{x\to0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x^4}=-\infty$$

Α4.α) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x$.

Όμως $\alpha=f'(3)=\varepsilon\varphi45^\circ=1$, το σημείο Α ανήκει σ' αυτή οπότε $f(3)=3$.

β) $(f\circ f)'(3)=f'(f(3))f'(3)=f'(3)f'(3)=1$, $g(f(3))=g(3)=9-3=6$,

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$.

$$(g\circ f)'(3)=g'(f(3))f'(3)=g'(3)=6+\frac{9}{9}=7$$

γ) $(g+f)'(3)=g'(3)+f'(3)=7+1=8$

$(g\cdot f)'(3)=g'(3)f(3)+g(3)f'(3)=7\cdot3+6\cdot1=27$

Θέμα Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$.

Αν $\alpha\ne-1$ τότε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\dfrac{1-\beta+\gamma}{\alpha+1}\in\mathbb{R}$ άτοπο.

Για $\alpha=-1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[(1-\beta+\gamma)\dfrac{1}{x+1}\right]=-\infty$ οπότε $\alpha=-1$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x+\gamma-x^2-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x+\gamma}{x+1}\right)$.

Αν $\beta\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\beta-1)x}{x}=\beta-1\in\mathbb{R}$ άτοπο.

Για $\beta=1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma}{x+1}=0$ οπότε $\beta=1$.

B2. Για $\alpha=-1,\beta=1$ έχουμε $f(x)=\frac{x^2+x+\gamma}{x+1}, x\neq-1, \gamma>0$

α) Έχουμε : $\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x+1\neq-1\end{cases}\Rightarrow x\neq-2.$

Άρα υπάρχει η $f\circ g$ με $A_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{-2\}$ και τύπο

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{(x+1)^2+x+1+\gamma}{x+2}=\frac{x^2+2x+1+x+1+\gamma}{x+2}=\frac{x^2+3x+\gamma+2}{x+2}.$$

β) Η γραφική παράσταση της $f\circ g$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ οπότε

$$(f\circ g)(0)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2+\gamma=3\Leftrightarrow\gamma=1 \text{ και } f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}, x\neq-1.$$

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+\cancel{x+1}-x^2\cancel{-x-1}}{(x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Έστω $\Delta(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f .

Η (ε) έχει εξίσωση : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}\cdot(x-x_0)$.

Η (ε) διέρχεται από το Γ οπότε

$$-\frac{x_0^2+x_0+1}{\cancel{x_0+1}}=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^{\cancel{2}}}\cdot(-1-x_0)\Leftrightarrow x_0^2+x_0+1=\frac{x_0^2+2x_0}{\cancel{x_0+1}}\cdot\cancel{(x_0+1)}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_0^2}+x_0+1=\cancel{x_0^2}+2x_0\Leftrightarrow x_0=1.$$

Επομένως η (ε) έχει εξίσωση : $y-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$.

B4. α) Έχουμε $f'(x)\geq0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\geq0\Leftrightarrow x^2+2x\geq0\Leftrightarrow(x\leq-2)$ ή $(x\geq0)$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2],[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,-1),(-1,0]$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2)=-3$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=1$

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$. Έστω $A_1=(-\infty,-2), A_2=[-2,-1), A_3=(-1,0]$ και $A_4=(0,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε:

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\right)=(-\infty,f(-2))=(-\infty,-3)$, $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^-}f(x),f(-2)\right]=(-\infty,-3]$,

$f(A_3)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\right)=[1,+\infty)$ και $f(A_4)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=(f(0),+\infty)=(1,+\infty)$.

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)=(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y-1=\dfrac{1-0}{0-(-1)}(x-0)\Leftrightarrow y=x+1$

Επειδή η ε_1 είναι εφαπτομένη της C_a στο Α, είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(x)-a(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(x)-1}{x}=\lambda_{\varepsilon_1}=1$.

Επειδή η f είναι άρτια, η b είναι συμμετρική της a ως προς τον άξονα y΄y, οπότε για κάθε $x\ge 0$ είναι $b(x)=a(-x)$.

Είναι $\lambda_2=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b(x)-b(0)}{x}\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a(-x)-1}{x}\overset{\substack{-x=u\Leftrightarrow\\ x=-u}}{\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{a(u)-1}{-u}=-\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{a(u)-1}{u}=-1$

Η εφαπτομένη ημιευθεία ε_2 της C_b στο $A(0,1)$ έχει εξίσωση: $y-b(0)=\lambda_2 x\Leftrightarrow y=-x+1$

Για κάθε $x<0$ η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\left(f(x)-x^2\right)'=f'(x)-2x$.

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\left(f(x)-x^2\right)'=f'(x)-2x$. Στο $x=0$ είναι

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{a(x)-1}{x}-\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{b(x)-1}{x}-\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)=-1$, οπότε η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Γ2. Παρατηρούμε ότι $f\nearrow(-\infty,0]$ και $\searrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1<x_2\le 0$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2$, άρα $f(x_1)-x_1^2<f(x_2)-x_2^2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ και $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2$, άρα $f(x_1)-x_1^2>f(x_2)-x_2^2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι η f έχει μέγιστο το 1 για $x=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\le 1=f(0)$.

Επειδή $x^2\ge 0\Leftrightarrow -x^2\le 0$, είναι $f(x)-x^2\le 1\Leftrightarrow g(x)\le g(0)$. Άρα η g έχει μέγιστο το 1 για $x=0$.

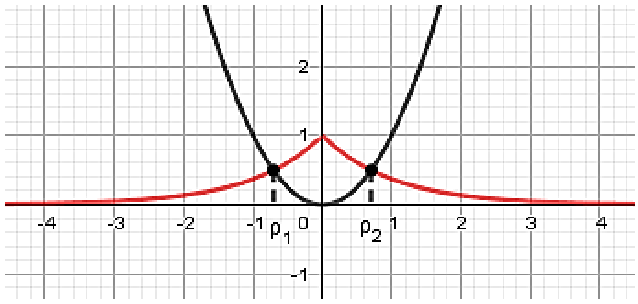
Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-x^2\right)=0-\infty=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-x^2\right)=0-\infty=-\infty$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1)=(-\infty,1]$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $g(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1)=0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2)=(-\infty,1)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $g(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_2)=0$. Τελικά η g έχει ακριβώς 2 ρίζες.

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x^2=0\Leftrightarrow f(x)=x^2$ Γεωμετρικά η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$y = x^2$ ακριβώς σε δύο σημεία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γ4. $f(x-1)+xf'(x-1)+1=4x \Leftrightarrow f(x-1)+xf'(x-1)+1-4x=0 \Leftrightarrow \left[xf(x-1)+x-2x^2\right]'=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf(x-1)+x-2x^2,\ x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=f(x-1)+xf'(x-1)+1-4x$.

Είναι $h(0)=0$ και $h(1)=f(0)+1-2=0$, δηλαδή $h(0)=h(1)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi-1)+\xi f'(\xi-1)+1=4\xi$.

Γ5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln f(x)}{ημf(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln f(x)\dfrac{1}{ημf(x)-f(x)}\right)=-\infty(-\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln f(x)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ημf(x)-f(x)\right)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}=\lim\limits_{u\to0^+}(ημu-u)=0$ γιατί για $u>0$ είναι $|ημu|<u \Leftrightarrow -u<ημu<u$.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)=2xf(x)+x^2e^x\left(e^x-2\right) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2e^x\left(e^x-2\right)+x^2 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2=x^2e^{2x}-2x^2e^x+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=\left(xe^x-x\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\left|x\left(e^x-1\right)\right|$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$, τότε $g(x)=0 \Leftrightarrow x\left(e^x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\left(e^x=1 \Leftrightarrow x=0\right)$

Για κάθε $x<0$ είναι $e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$ οπότε $x\left(e^x-1\right)>0$ και για κάθε $x>0$ είναι $e^x>1 \Leftrightarrow x\left(e^x-1\right)>0$, οπότε η (1) γίνεται: $|g(x)|=x\left(e^x-1\right)$ (2).

Για κάθε $x\neq0$ είναι $g(x)\neq0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $g(-2)=f(-2)+2=-\dfrac{2}{e^2}+2>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x<0$, οπότε η (2) γίνεται:

$g(x)=x\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow f(x)-x=x\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow f(x)=xe^x,\ x<0$

Είναι $g(1)=f(1)-1=e-1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η (2) γίνεται:

$g(x)=x\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow f(x)-x=x\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow f(x)=xe^x,\ x>0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, οπότε τελικά $f(x)=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η κατακόρυφη απόσταση της C_f από την ε είναι $d=\left|f(x)-(x-1)\right|$.

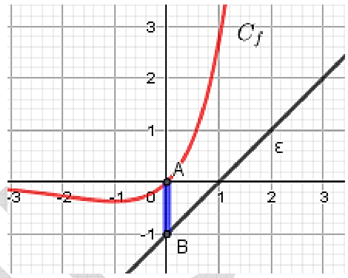
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x+1=xe^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x+xe^x-1=e^x(x+1)-1$ και $h''(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)$.

Είναι $h''(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^x(x+2)\ge 0 \Leftrightarrow x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -2$.

Για κάθε $x<-2$ είναι $h''(x)<0$ και επειδή η h' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$.

Για κάθε $x>-2$ είναι $h''(x)>0$ και επειδή η h' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,+\infty)$.

Είναι $h'(-2)=-\frac{1}{e}-1<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^x+e^x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+e^x-1\right]=-1$ γιατί από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.



Παρατηρούμε ότι $h'(0)=0$, οπότε για κάθε

$-2<x<0 \overset{h'\nearrow}{\Rightarrow} h'(x)<h'(0)=0 \Rightarrow h\searrow[-2,0]$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $x=-2$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x>0 \overset{h'\nearrow}{\Rightarrow} h'(x)>h'(0)=0 \Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=f(0)+1=1$, άρα

$h(x)\ge h(0)=1>0 \Rightarrow f(x)>x-1$, οπότε $d=f(x)-(x-1)=h(x)$ και $d_{min}=1$

Παρατηρήσεις για το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$

Το όριο θα μπορούσε να υπολογιστεί και με το θεώρημα του De L' Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

Ακόμη σε μια πρόσφατη εργασία του κυρίου Πολύζου με τίτλο αξιοσημείωτα όρια έχει τον εξής τρόπο για το συγκεκριμένο όριο:

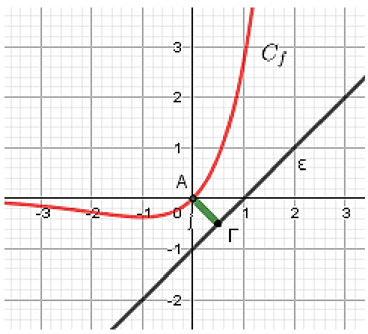
$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^u}{u}}\underset{\substack{u\to+\infty\Rightarrow\\ t\to+\infty}}{\overset{\frac{e^u}{u}=t}{=}}\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{t}=0$$ γιατί για $u>0$ είναι

$$\frac{e^u}{u}=\frac{\left(e^{\frac{u}{2}}\right)^2}{u}\ge\frac{\left(\frac{u}{2}+1\right)^2}{u}>\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{u}=\frac{\frac{u^2}{4}}{u}=\frac{u}{4}$$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{4}=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$

Δ3. Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Τότε $y=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι ε: $y=x-1\Leftrightarrow x-y-1=0$.

Η απόσταση του Μ από την ε, είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|x-xe^x-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|-h(x)|}{\sqrt{2}}\overset{h(x)\ge1}{=}\frac{h(x)}{\sqrt{2}}$$



Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\ge h(0)=1\Leftrightarrow\frac{h(x)}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow d(M,\varepsilon)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$

άρα $d(M,\varepsilon)_{min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ για $x=0$, άρα όταν $M(0,0)$.

Δ4. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[5,6],[6,7]$, οπότε υπάρχουν

$\xi_1\in(5,6),\ \xi_2\in(6,7)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f(6)-f(5)=6e^6-5e^5$ και $f'(\xi_2)=f(7)-f(6)=7e^7-6e^6$

Είναι $f'(x)=xe^x+x$ και $f''(x)=xe^x+x+1>0$ για κάθε $x\in(5,7)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[5,7]$. Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow 6e^6-5e^5<7e^7-6e^6\Leftrightarrow 12e^6<7e^7+5e^5\Leftrightarrow e^6<\frac{7e^7+5e^5}{12}$

Λύσεις $7^{ου}$ διαγωνίσματος

Θέμα Α

A1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$, δηλαδή. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $x_0=0$ είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

A2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

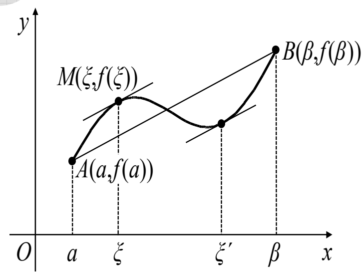
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

A3. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

A4. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

A5. α) Σ β) Σ γ) Λ

Θέμα Β

B1. Επειδή η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$, είναι $f(0)=0$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(2)-f(0)=-3$ προκύπτει $f(2)=-3$ και αντικαθιστώντας στη σχέση $f(4)-f(2)=-3$ προκύπτει $f(4)=-6$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(7)-f(4)=5$ προκύπτει ότι $f(7)=-1$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ επειδή είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και $f(2)\neq f(0)$. Επειδή $f(2)<-10^{-2020}<f(0)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=-10^{-2020}$

B2. Από την γραφική παράσταση της f' έχουμε ότι $f'(2)=-4$ και από το Β1 έχουμε ότι $f(2)=-3$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$ είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+3=-4(x-2) \Leftrightarrow y=-4x+5$

Β3. Για κάθε $x\in(0,4)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,4]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(4,7)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[4,7]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$, ολικό ελάχιστο το $f(4)=-6$ και τοπικό μέγιστο το $f(7)=-1$.

Επειδή $f(0)>f(7)$, το $f(0)=0$ είναι ολικό μέγιστο της f.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $A=[0,7]$, έχει ελάχιστο το $f(4)=-6$ και μέγιστο το $f(0)=0$, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=[-6,0]$.

Β4. Είναι $f(x)>-6 \Leftrightarrow f(x)+6>0$ για κάθε $x\in[0,4)\cup(4,7]$ και $\lim\limits_{x\to4}(f(x)+6)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to4}\frac{1}{f(x)+6}\ \underset{\substack{x\to4\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{f(x)+6=u}{=}}\ \lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty .\ \text{Είναι } \lim_{x\to4}\frac{xe^{-x}}{f(x)+6}=\lim_{x\to4}\left[xe^{-x}\frac{1}{f(x)+6}\right]=4e^{-4}(+\infty)=+\infty$$

Β5. $x\in[0,7]$ έχουμε ότι $g'(x)=f'(x)+2x+1 \Leftrightarrow g'(x)-f'(x)=(x^2+x)' \Leftrightarrow h'(x)=(x^2+x)' \overset{\text{ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ}}{\Leftrightarrow}$

$h(x)=x^2+x+c$. Για $x=2$ έχουμε: $h(2)=6+c \Leftrightarrow g(2)-f(2)=6+c \Leftrightarrow 8=6+c \Leftrightarrow c=2$

Οπότε: $h(x)=x^2+x+2$, $x\in[0,7]$

Θέμα Γ

Γ1. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=x$ να έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in[0,3]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=f(0)=2,\ g(3)=f(3)-3=\dfrac{3\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}-3=\dfrac{\cancel{3\alpha^3}+\beta^3-\cancel{3\alpha^3}-3\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}=-\dfrac{2\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}<0$, δηλαδή

$g(0)g(3)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\lambda\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $g(\lambda)=0 \Leftrightarrow f(\lambda)=\lambda$.

Γ2. Έστω ότι $f(\mu)=\mu,\ \mu>3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=x_0$ είναι η ευθεία ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν: $0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in[\lambda,\mu]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\lambda,\mu]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (λ,μ) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. Είναι $h(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1,\ h(\mu)=\dfrac{f(\mu)}{\mu}=\dfrac{\mu}{\mu}=1$, δηλαδή $h(\lambda)=h(\mu)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(\lambda,\mu)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0 \Leftrightarrow$ $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$.

Γ3. α) Είναι $f'(x)=\dfrac{(3\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta)(\alpha^x+\beta^x)-(3\alpha^x+\beta^x)(\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta)}{(\alpha^x+\beta^x)^2} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{2\alpha^x\beta^x(\ln\alpha-\ln\beta)}{(\alpha^x+\beta^x)^2}<0$ γιατί $\alpha<\beta$, άρα $f\searrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\beta^x}\left(3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+1\right)}{\cancel{\beta^x}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+1\right)}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{\alpha^x}\left(3+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)}{\cancel{\alpha^x}\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)}=3$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(1,3)$.

β) $(x-1)\alpha^x+\left(x-\frac{1}{3}\right)\beta^x=(\alpha^x+\beta^x)\ln x \Leftrightarrow x\alpha^x-\alpha^x+x\beta^x-\frac{1}{3}\beta^x=\alpha^x\ln x+\beta^x\ln x\Leftrightarrow$

$3x\alpha^x-3\alpha^x+3x\beta^x-\beta^x=3\alpha^x\ln x+3\beta^x\ln x\Leftrightarrow 3x\alpha^x+3x\beta^x-3\alpha^x\ln x-3\beta^x\ln x=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow$

$3\alpha^x(x-\ln x)+3\beta^x(x-\ln x)=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow 3(x-\ln x)(\alpha^x+\beta^x)=3\alpha^x+\beta^x\Leftrightarrow$

$3(x-\ln x)=\dfrac{3\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+\beta^x}\Leftrightarrow f(x)=3(x-\ln x)$ (1)

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\le x-1\Leftrightarrow x-\ln x\ge 1\Leftrightarrow 3(x-\ln x)\ge 3$ και $1<f(x)<3$, άρα η (1) είναι αδύνατη.

Γ4. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x\neq 1, 2$ έχουμε

$\dfrac{F(x)+1}{x-2}+\dfrac{F(x+2)+2}{x-1}=0\Leftrightarrow (x-1)(F(x)+1)+(x-2)(F(x+2)+2)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-1)(F(x)+1)+(x-2)(F(x+2)+2),\quad x\in[1,2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης $g(1)=-(F(3)+2)=-4<0, g(2)=F(2)+1>0$ οπότε

$g(1)\cdot g(2)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$.

Δ2. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0)+F(x_0)-F(x_0-h)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{F(x_o+h)-F(x_0)}{h}-\dfrac{F(x_o-h)-F(x_0)}{h}\right)=2F'(x_0)$ αφού

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_o-h)-F(x_0)}{h}\overset{u=-h}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{h\to0,\ u\to0}\dfrac{F(x_o+u)-F(x_0)}{-u}=-F'(x_0)$.

Επομένως $2F'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow F'(x_0)=f(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 οπότε $F'(x)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Δ3. Για την F ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[2,3]$ άρα υπάρχει $\kappa\in(2,3)$ τέτοιος ώστε

$F'(k)=\dfrac{F(3)-F(2)}{3-2}\Leftrightarrow f(k)=2$ οπότε $2<k<3\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(2)>f(k)>f(3)\Leftrightarrow f(3)<2<f(2)$.

Δ4. α) Η F είναι συνεχής στο $[1,2]$,παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $F(1)=0=F(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\alpha\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $F'(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$.

Όμοια ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[3,4]$ οπότε υπάρχει $\beta\in(3,4)$ τέτοιος ώστε $F'(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες. τις α,β και 5 αφού $F'(5)=0\Leftrightarrow f(5)=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,παραγωγίσιμη στο (α,β) , $f(\alpha)=f(\beta)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $c_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(c_1)=0$.

Όμοια ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\beta,5]$ οπότε υπάρχει $c_2\in(\beta,5)$ τέτοιος ώστε $f'(c_2)=0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[c_1,c_2]$,παραγωγίσιμη στο (c_1,c_2) , $f(\alpha)=f(\beta)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $c_0\in(c_1,c_2)$ τέτοιος ώστε $f''(c_0)=0$.

Δ5. Έχουμε $f(x)\le(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2\Leftrightarrow f(x)-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2\le 0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)^2$.

Με κατάλληλη αντικατάσταση έχουμε. $h(\alpha)=h(\beta)=h(5)=0$ οπότε η σχέση (1) ισοδυναμεί με τις σχέσεις $h(x)\le h(\alpha), h(x)\le h(\beta)$ και $h(x)\le h(5)$.

Επομένως η h έχει τρεις θέσεις μεγίστου στα $\alpha,\beta,5\in\mathbb{R}$,είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε

$h'(\alpha)=h'(\beta)=h'(5)=0$. Όμως

$$h'(x)=f'(x)-2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-5)^2-2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-5)^2-2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-5)$$

οπότε: $\begin{cases}h'(\alpha)=0\\ h'(\beta)=0\\ h'(5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(\alpha)=0\\ f'(\beta)=0\\ f'(5)=0\end{cases}$.

Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=f(5)=0$ η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στα σημεία $A(\alpha,0), B(\beta,0)$ και $\Gamma(5,0)$.

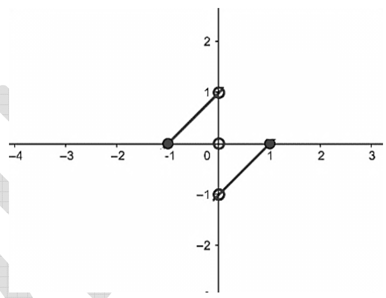
Λύσεις $8^{ου}$ διαγωνίσματος

A1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

A2. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0) \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x\in(0,1] \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$ και όμως δεν έχει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή, αφού η f γνησίως αύξουσα στο [-1,0) και συνεχής με $f([-1,0))=[0,1)$, η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,1] με $f((0,1])=(-1,0]$ και επειδή $f(0)=0$ η f έχει σύνολο τιμών το $(-1,1)$ άρα δεν έχει ακρότατα.



A3. α) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

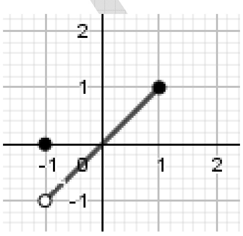
$\left[f(-x)\right]'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, άρα η f' είναι περιττή.

β) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

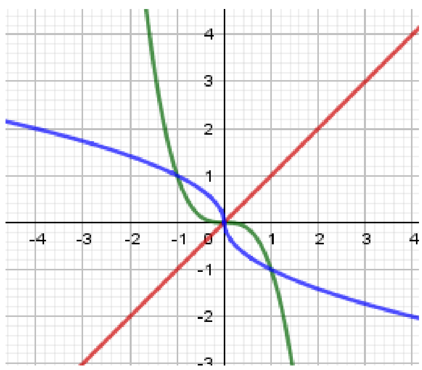
$\left[f(-x)\right]'=\left[-f(x)\right]\Leftrightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, άρα η f' είναι άρτια.

γ) Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T, ισχύει ότι $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $f(x+T)$, $f(x-T)$ είναι παραγωγίσιμες ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε: $\left[f(x+T)\right]'=\left[f(x-T)\right]'=f'(x)\Leftrightarrow$
$f'(x+T)=f'(x-T)=f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

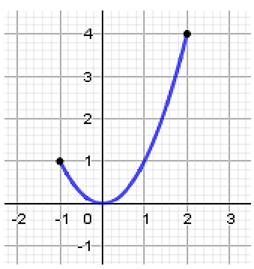
A4. α)



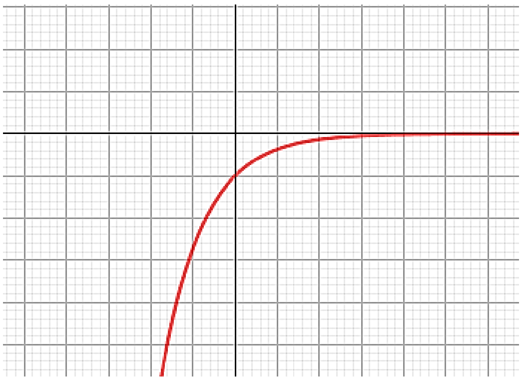
β)



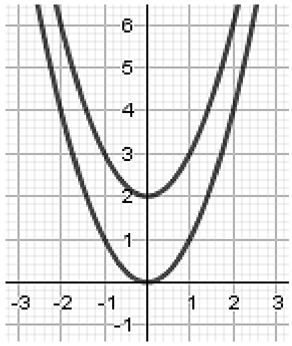
γ)



δ)



ε) $y = x^2$ και $y = x^2 + 2$



Θέμα Β

Β1. Είναι $R'(t) = 20 + 10t - \frac{3}{4}t^2 \Leftrightarrow R'(t) = \left(20t + 5t^2 - \frac{1}{4}t^3\right)' \Leftrightarrow$

$R(t) = 20t + 5t^2 - \frac{1}{4}t^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ξεκινά η εξόρυξη του πετρελαίου δεν έχει ακόμη αντληθεί πετρέλαιο, οπότε: $R(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ και $R(t) = 20t + 5t^2 - \frac{1}{4}t^3$.

Ο αριθμός των βαρελιών θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της γεώτρησης, είναι: $R(8) = 20 \cdot 8 + 5 \cdot 8^2 - \frac{1}{4} \cdot 8^3 = 160 + 320 - 128 = 352$ χιλιάδες βαρέλια.

Β2. Η συνάρτηση $R'(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική με $R''(t) = 10 - \frac{3}{2}t$.

Είναι $R''(t) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{3}{2}t \geq 0 \Leftrightarrow 10 \geq \frac{3}{2}t \Leftrightarrow t \leq \frac{20}{3}$.

Για κάθε $t \in \left(0, \frac{20}{3}\right)$ είναι $R''(t) > 0$ και επειδή η R' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{20}{3}\right]$. Για κάθε $t \in \left(\frac{20}{3}, +\infty\right)$ είναι $R''(t) < 0$ και επειδή η R' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right)$. Η R', δηλαδή ο ρυθμός άντλησης του πετρελαίου γίνεται μέγιστος τη χρονική στιγμή $t = \frac{20}{3}$.

Β3. Η R' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left[0, \frac{20}{3}\right]$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$R'(\Delta_1) = \left[R'(0), R'\left(\frac{20}{3}\right)\right] = \left[20, \frac{160}{3}\right]$. Επειδή το 30 βρίσκεται στο εσωτερικό του $R'(\Delta_1)$, υπάρχει χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία $R'(t_1) = 30$. Επειδή η R' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, το t_1 είναι μοναδικό στο διάστημα αυτό.

Η R' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{20}{3}, 12\right]$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$R'(\Delta_2) = \left[R'(12), R'\left(\frac{20}{3}\right)\right] = \left[32, \frac{160}{3}\right]$. Επειδή το 30 δεν περιέχεται στο $R'(\Delta_2)$, δεν υπάρχει στο

Δ_2 χρονική στιγμή για την οποία $R'(t)=30$. Άρα υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή t_0 στο πρώτο χρόνο λειτουργίας της γεώτρησης, κατά την οποία ο ρυθμός άντλησης είναι 30.000 βαρέλια το μήνα.

Β4. $R(t)=0 \Leftrightarrow 20t+5t^2-\frac{1}{4}t^3=0 \Leftrightarrow t\left(-\frac{1}{4}t^2+5t+20\right)=0 \Leftrightarrow t=0$ ή $-\frac{1}{4}t^2+5t+20=0 \Leftrightarrow$

$-t^2+20t+80=0$.

t	0		$10+6\sqrt{5}$		$+\infty$
$-t^2+20t+80$		+	0	-	

Επειδή $t \ge 0$, θα έχει εξορυχτεί το σύνολο του πετρελαίου της συγκεκριμένης εξόρυξης τη χρονική στιγμή $t=10+6\sqrt{5}$.

Όμως $10+6\sqrt{5}<24 \Leftrightarrow 6\sqrt{5}<14 \Leftrightarrow \left(6\sqrt{5}\right)^2<14^2 \Leftrightarrow 180<196$ ισχύει.

Επειδή $t=10+6\sqrt{5}<24$ σε λιγότερο από δύο χρόνια ($t<24$) θα έχει εξορυχτεί το σύνολο του πετρελαίου της συγκεκριμένης εξόρυξης.

Θέμα Γ

Γ1. Η f' είναι περιττή συνάρτηση άρα $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε πραγματικό x οπότε

$\left[-f(-x)\right]'=\left[-f(x)\right]' \Leftrightarrow -f(-x)=-f(x)+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $c=0$ οπότε $-f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-2,2]$ οπότε γι κάθε $x\in A_f, -x\in A_f$ άρα η f είναι άρτια συνάρτηση.

Γ2. Έστω x ,y οι διαστάσεις του ορθογωνίου και Π η περίμετρος του.

Τότε $\Pi=2x+2y \Leftrightarrow 2x+2y=8 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$.

Το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $E(x)=x\cdot y=x\cdot(4-x)=4x-x^2, x\in(0,4)$.

Η συνάρτηση Ε είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha<0$ άρα έχει θέση μεγίστου

το $x=-\frac{2}{-1}=2$ άρα $-f(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=-2$.

Η f είναι άρτια οπότε $f(-2)=f(2)=-2$.

Γ3. **α)** Έστω $g(x)=\frac{f(x)+1}{x+1}, x\ne-1 \Leftrightarrow f(x)=(x+1)g(x)-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[(x+1)g(x)-1\right] \Leftrightarrow f(-1)=-1=f(1)$ αφού η f είναι άρτια.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=1$ οπότε $\alpha=1$.

β) Η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη τον άξονα x΄x οπότε ψάχνουμε τα σημεία για τα οποία $f'(x)=0$. Τα σημεία αυτά όπως φαίνεται από το σχήμα είναι τα $A(-2,f(-2)), B(2,f(2))$ και $O(0,f(0))$.

Για το σημείο Α και Β έχουμε τις οριζόντιες εφαπτόμενες $y=f(-2)=-2, y=f(2)=-2$ αντίστοιχα. Επομένως ο άξονας x΄x είναι η οριζόντια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Ο οπότε $f(0)=0$.

Γ4. Από την γραφική παράσταση της παραγώγου που μας δίνεται έχουμε ότι $f'(x)>0$ στο $(-2,0)$, $f'(x)<0$ στο $(0,2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

αφού είναι συνεχής στο $[-2,2]$

Επομένως παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $f(0)=0$ και ελάχιστο στα -2,2 το $f(-2)=f(2)=-2$.

Γ5. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $f(0)=0$ οπότε $f(x)\le f(0) \Leftrightarrow f(x)\le 0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο 0. Άρα :

$$\lim_{x\to 0}\left[\eta\mu f(x)\cdot\frac{e^{-\frac{1}{f(x)}}+7\cdot 2^{-\frac{1}{f(x)}}}{5\cdot e^{-\frac{2}{f(x)}}-2^{-\frac{3}{f(x)}}}\cdot\frac{5\cdot\ln(-f(x))-1}{7f(x)\cdot\ln(-f(x))-f(x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\eta\mu f(x)\cdot\frac{e^{-\frac{1}{f(x)}}+7\cdot 2^{-\frac{1}{f(x)}}}{5\cdot e^{-\frac{2}{f(x)}}-2^{-\frac{3}{f(x)}}}\cdot\frac{5\cdot\ln(-f(x))-1}{f(x)\left[7\cdot\ln(-f(x))-1\right]}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{f(x)}}+7\cdot 2^{-\frac{1}{f(x)}}}{5\cdot e^{-\frac{2}{f(x)}}-2^{-\frac{3}{f(x)}}}\cdot\frac{5\cdot\ln(-f(x))-1}{7\cdot\ln(-f(x))-1}\right]=1\cdot 0\cdot\frac{5}{7}=0 \text{ αφού } \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0,\\ u\to 0}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{f(x)}}+7\cdot 2^{-\frac{1}{f(x)}}}{5\cdot e^{-\frac{2}{f(x)}}-2^{-\frac{3}{f(x)}}}\underset{\substack{x\to 0,\\ u\to +\infty}}{\overset{u=-\frac{1}{f(x)}}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u+7\cdot 2^u}{5e^{2u}-2^{3u}}=\lim_{u\to+\infty}\cancel{\left(\frac{e}{8}\right)^u}^{0}\cdot\frac{1+7\cancel{\left(\frac{2}{e}\right)^u}^{0}}{5\cancel{\left(\frac{e^2}{8}\right)^u}^{0}-1}=0\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\ln(-f(x))-1}{7\cdot\ln(-f(x))-1}\underset{\substack{x\to 0,\\ u\to 0}}{\overset{u=-f(x)}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{5\ln u-1}{7\ln u-1}\underset{\substack{u\to 0,\\ k\to-\infty}}{\overset{k=\ln u}{=}}\lim_{k\to-\infty}\frac{5k-1}{7k-1}=\lim_{k\to-\infty}\frac{5k}{7k}=\frac{5}{7}.$$

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)+x^2+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2\Leftrightarrow$

$|f(x)-x|=|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in[0,\pi]$. Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}x=\dfrac{\pi}{4}$.

Για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$ είναι $g(x)\ne 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$.

Είναι $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ και η (1) γίνεται:

$f(x)-x=|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow f(x)=x+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|$.

Είναι $g(\pi)=f(\pi)-\pi=-1<0$ άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$, οπότε η (1) γίνεται:

$-f(x)+x=|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow f(x)=x-|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|$.

Για $x=\frac{\pi}{4}$ η (1) γίνεται $\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right|=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$, οπότε $f(x)=\begin{cases} x+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{4} \\ x-|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|, & x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right] \end{cases}$

Για $x=\frac{\pi}{6}$ είναι $\eta\mu\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ άρα $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, οπότε $f(x)=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1>0$ άρα $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$, οπότε $f(x)=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$. Τελικά $f(x)=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και $f''(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $0<x<\frac{\pi}{4}$ είναι $f'(x)<f'(0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Παρατηρούμε ότι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Για κάθε $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $f'(x)<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow f\searrow\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=\frac{\pi}{4}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $f'(x)>f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$ και τοπικά μέγιστα τα $f(0)=1$ και $f(\pi)=\pi-1$.

Δ3. Επειδή η f' έχει ελάχιστο στο $x=\frac{\pi}{4}$, το σημείο της C_f με τη μικρότερη κλίση είναι το $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\equiv\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

Δ4. Έστω $h(x)=f(x)-3x+2\pi+1=x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-3x+2\pi+1=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-2x+2\pi+1,\ x\in[0,\pi]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $h'(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-2$

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $0<\eta\mu x<1 \Leftrightarrow -1<-\eta\mu x<0$ και $-1<\sigma\upsilon\nu x<1 \Leftrightarrow -1<-\sigma\upsilon\nu x<1$, οπότε $-2<-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x<1 \Leftrightarrow -4<-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-2<-1 \Rightarrow h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για $0 \le x \le \pi$ είναι $h(x) \ge h(\pi) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3x + 2\pi + 1 \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 3x - 2\pi - 1$.

Δ5. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right] = +\infty$ γιατί για κάθε $x > 0$ είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Όμοια και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right] = -\infty$ γιατί για κάθε $x < 0$ είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, λόγω του κριτηρίου

παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Όμοια και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$