Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026

Αντώνης Βαλέργας **Γαβριήλ Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς **Νίκος Κουμάντος**
Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**
Θανάσης Νικολόπουλος **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Δημήτρης Πατσιμάς **Νίκος Σαμπάνης**
Βαγγέλης Τόλης **Νίκος Τούντας** **Ισαάκ Χιονίδης**

6ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 2ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

7 μονάδες

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] , τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] .

β) Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 ,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

10 μονάδες

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\ln x) = \dfrac{x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

4 μονάδες

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

6 μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $f^{-1}(x) = \ln x - \ln(1-x),\ x \in (0,1)$.

Β3. Να μελετήσετε την $h(x) = f^{-1}(x)$ ως προς τη μονοτονία και τη κυρτότητα.

5 μονάδες

Ασκησόπολις

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

3 + 3 = 6 μονάδες

Β5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)=f(\ln x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x=e$.

4 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+e^{\alpha}+3\ ,\ x\le 0 \\ x^3-6x^2+\alpha+4\ ,\ x>0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

4 μονάδες

Γ2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όπου αυτή ορίζεται.

6 μονάδες

Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

7 μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f\left(x^2+2\right)+f\left(x^2+6\right)>2f\left(x^2+4\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=xe^x+2\int_0^1 f(x)dx-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\,e^x$, $x\in\mathbb{R}$

5 μονάδες

Δ2. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\text{συν}\kappa$, $\kappa\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4 + 4 = 8 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>-1$, με $\alpha<\beta$, υπάρχει μοναδικός $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\dfrac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}$.

5 μονάδες

Δ4.α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

β) Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\cdot e^{x+2}+e^2|x+2|\le -1$.

3 + 4 = 7 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Ασκησόπολις

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.	Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:	**1**
	• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.	**1**
	• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1).	**2**
	Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$ και τότε $f(x_1) = f(x_2)$.	**2**
	• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.	**1**

Α2.	Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$,	**1**
	τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.	**2**
	Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.	**1**

Α3.	**α)** Αληθής	**1**
	β) Αν η f δεν έπαιρνε τουλάχιστον δύο ετερόσημες τιμές, τότε θα ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ που είναι άτοπο.	**3**

Α4.	**α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό	**10**
	Αιτιολόγηση των ερωτήσεων Σωστού – Λάθους (Δεν απαιτείται στις απαντήσεις) **α)** Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in [0,1] / g(x) \in [0,1]\} = \varnothing$ επειδή $g([0,1]) = [2,3]$ άρα $2 \leq g(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δηλαδή δεν ορίζεται η $f \circ g$. **β)** ΘΕΩΡΙΑ **γ)** Έστω $g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ και $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1, +\infty)$ Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$ όμως η $g \circ f$ δεν ορίζεται στο σημείο αυτό. **Παρατήρηση:** Είναι αληθής στην περίπτωση που g συνεχής στο $f(x_0)$, σύμφωνα με την θεωρία μας. **δ)** Η f' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. **ε)** Έστω $f(x) = x^3$ με παράγωγο στο $\mathbb{R}$ την $f'(x) = 3x^2$, δηλαδή $f'(0) = 0$. Παρόλα αυτά η f είναι γνησίως αύξουσα.	

Θέμα Β

Β1.	Θέτουμε $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u$, $u \in \mathbb{R}$	**2**
	και έχουμε $f(\ln x) = \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(u) = \dfrac{e^u}{e^u + 1}$, $u \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.	**2**

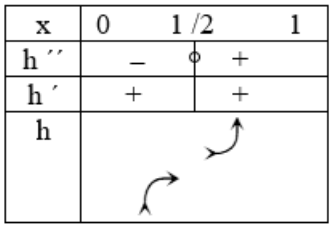
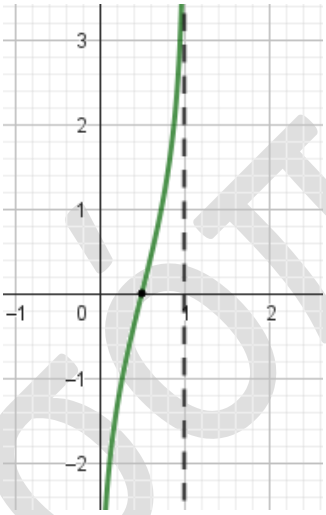
Askisopolis

	1ος τρόπος για την 1-1:	
	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.	2
	2ος τρόπος για την 1-1:	
	Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}=\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+e^{x_1}=\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.	2
	1ος τρόπος για την εύρεση της αντίστροφης (Χρειάζεται την μονοτονία) :	
	Επειδή η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,1)=A_{f^{-1}}$	1
	αφού είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.	1
B2.	Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(0,1)$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=e^xy+y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^x-e^xy=y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{y}{1-y}$, $y\in(0,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}=\ln x-\ln(1-x)$, $x\in(0,1)$.	2
	2ος τρόπος για την εύρεση της αντίστροφης:	
	Για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=e^xy+y\Leftrightarrow e^x-e^xy=y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y$ (1)	1
	Αν $y=1$ τότε η (1) γίνεται $0=1$ αδύνατη. Άρα είναι $y\neq1$ και τότε:	1
	(1) $\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y}{1-y}$ (2) και πρέπει $\dfrac{y}{1-y}>0\Leftrightarrow y(1-y)>0\Leftrightarrow y\in(0,1)$.	1
	Τότε (2) $\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y}{1-y}$ άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{y}{1-y}$, $y\in(0,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}=\ln x-\ln(1-x)$, $x\in(0,1)$.	1

	Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$.	1
B3.	Η h' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h''(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}=$ $=\dfrac{-(1-x)^2+x^2}{x^2(1-x)^2}=\dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$.	1
	Είναι. $h''(x)\geq0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}\geq0\overset{x^2(1-x)^2>0}{\Leftrightarrow}2x-1\geq0\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow}x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$. Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $h''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι $h''(x)>0$, και επειδή η h είναι συνεχής στο	3

Ασκησοπόλις

	$x=\frac{1}{2}$, είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Η h έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2},h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\equiv\left(\frac{1}{2},0\right)$	

B4.	Η h είναι συνεχής στο $(0,1)$ άρα δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες και πιθανές κατακόρυφες είναι οι ευθείες $x=0$ και $x=1$.	**1**
	Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=-\infty$, άρα η x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=0+\infty=+\infty$, άρα η x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.	**2**
	  	**3**

B5.	Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_1^2 \lvert g(x)\rvert dx$.	**1**
	Είναι $g(x)=\frac{x}{x+1}\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.	**1**
	Άρα $E(\Omega)=\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx=\int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x-\ln\lvert x+1\rvert\right]_1^2=1-\ln\frac{3}{2}$ τ.μ.	**2**

Θέμα Γ

Γ1.	Αφού η f συνεχής ,είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\Rightarrow e^{\alpha}+3=\alpha+4\Leftrightarrow e^{\alpha}-\alpha-1=0\ (A)$	**1**
	1ος τρόπος:	
	Γνωρίζουμε ότι $e^x\geq x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα η εξίσωση (Α) ισχύει για $\alpha=0$.	**3**
	2ος τρόπος:	
	Έστω $g(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1$. Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$	**1**

Ασκησόπολις

	Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0$, και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Έχει ελάχιστο το $g(0)$, άρα $g(x)\ge g(0) \overset{g(0)=0}{\Leftrightarrow} g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έτσι $g(\alpha)\ge g(0)$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ το "=" ισχύει μόνο για $\alpha=0$.	2

Γ2.	Επομένως $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+4\,,\ x\le 0\\ x^3-6x^2+4\,,\ x>0\end{cases}$.	
	Για $x<0$: η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2+6x$.	1
	Για $x>0$: η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-12x$.	1
	$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+3x^2+4-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x^2+3x)}{\cancel{x}}=0$	1
	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-6x^2+4-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x^2-6x)}{\cancel{x}}=0$	1
	Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\Rightarrow f'(0)=0$	1
	Επομένως $f'(x)=\begin{cases}3x^2+6x\,,\ x\le 0\\ 3x^2-12x\,,\ x>0\end{cases}$	1

Γ3.	Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f''(x)=6x+6=6(x+1)$	1
	Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=6x-12=6(x-2)$	1
	Για $x<0$ είναι: $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x+6=0\Leftrightarrow x=-1$. $f''(x)>0\Leftrightarrow 6x+6>0\overset{x<0}{\Leftrightarrow}-1<x<0$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow 6x+6<0\Leftrightarrow x<-1$	1
	Για $x>0$ είναι: $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x-12=0\Leftrightarrow x=2$. $f''(x)>0\Leftrightarrow 6x-12>0\Leftrightarrow x>2$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow 6x-12<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<2$	1
	Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα $f\curvearrowright(-\infty,-1]$, $f\curvearrowleft[-1,0]$, $f\curvearrowright[0,2]$ και $f\curvearrowleft[2,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(-1,f(-1))\equiv(-1,6)$ και το $(0,f(0))\equiv(0,4)$ (αφού ορίζεται η εφαπτομένη της στο $x_0=0$ επειδή υπάρχει η $f'(0)$) και το $(2,f(2))\equiv(2,-12)$.	3

Γ4.	Παρατηρούμε ότι $x^2+4>2$, $x^2+6>2$ και $x^2+2\ge 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	1
	Είναι $f\curvearrowleft[2,+\infty)$ άρα $f'\nearrow[2,+\infty)$.	1
	Στα $[x^2+2,x^2+4]$ και $[x^2+4,x^2+6]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(x^2+2,x^2+4)$, $\xi_2\in(x^2+4,x^2+6)$ αντίστοιχα ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x^2+4)-f(x^2+2)}{(x^2+4)-(x^2+2)}$ (1) και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x^2+6)-f(x^2+4)}{(x^2+6)-(x^2+4)}$ (2)	3
	Είναι $\xi_1<x^2+4<\xi_2 \overset{f'\nearrow[2,+\infty)}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}\dfrac{f(x^2+4)-f(x^2+2)}{2}<\dfrac{f(x^2+6)-f(x^2+4)}{2}$ $\Leftrightarrow f(x^2+4)-f(x^2+2)<f(x^2+6)-f(x^2+4)\Leftrightarrow 2f(x^2+4)<f(x^2+2)+f(x^2+6)$	3

Ασκησόπολις

Θέμα Δ

Δ1.	Είναι $f(x)=xe^x+2\int_0^1 f(x)dx-2$ (1). Θέτω $c=\int_0^1 f(x)dx$ οπότε $f(x)=xe^x+2c-2$ (1).	**2**
	Με ολοκλήρωση της (1) κατά μέλη έχουμε: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(xe^x+2c-2)dx \Leftrightarrow c=\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1(2c-2)dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c=\int_0^1 x(e^x)'dx+(2c-2)(1-0) \Leftrightarrow c=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx+2c-2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c=e-\left[e^x\right]_0^1+2c-2 \Leftrightarrow -c=\cancel{e}-\cancel{e}+1-2 \Leftrightarrow -c=-1 \Leftrightarrow c=1$. Άρα $(1)\Rightarrow f(x)=xe^x+2-2$ οπότε $f(x)=xe^x, x\in\mathbb{R}$.	**3**

Δ2. α)	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$. Είναι $f'(x)\ge 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$. Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(-1)=-\frac{1}{e}$.	**2**
	Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)=-\frac{1}{e}$ αφού η f είναι συνεχής στο -1. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=[f(-1),0)=\left[-\frac{1}{e},0\right)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(-1,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.	**2**

Δ2. β)	Είναι $0<\kappa<\frac{\pi}{2} \overset{\text{συν}\kappa\searrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \text{συν}\frac{\pi}{2}<\text{συν}\kappa<\text{συν}0 \Leftrightarrow 0<\text{συν}\kappa<1$	**2**
	Παρατηρούμε ότι $\text{συν}\kappa\in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2, οπότε η εξίσωση $f(x)=\text{συν}\kappa$ έχει μία ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1. Δεν έχει άλλες ρίζες αφού $\text{συν}\kappa\notin f(\Delta_1)$.	**2**

Δ3.	Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M.	**1**
	Άρα $m\le f(\alpha)\le M \Leftrightarrow 3m\le 3f(\alpha)\le 3M$ (A) και $m\le f(\beta)\le M \Leftrightarrow 4m\le 4f(\beta)\le 4M$ (B). Με πρόσθεση των (A) και (B) : $7m\le 3f(\alpha)+4f(\beta)\le 7M \Leftrightarrow m\le\frac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}\le M$.	**2**
	Το $\frac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}\in f([\alpha,\beta])=[m,M]$ οπότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$: $f(\xi)=\frac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}$.	**1**

Ασκησόπολις

	Ο ξ είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$.	**1**

Δ4. α)	Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$	**1**
	Είναι $f''(x)\geq 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$. Για κάθε $x\in(-\infty,-2)$ είναι $f''(x)<0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$, και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο $[-2,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $(-2,f(-2))\equiv\left(-2,-\frac{2}{e^2}\right)$.	**3**

Δ4. β)	Είναι $(x+1)\cdot e^{x+2}+e^2\lvert x+2\rvert\leq -1 \Leftrightarrow xe^{x+2}+e^{x+2}+e^2\lvert x+2\rvert\leq -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{e^2\cdot xe^x+e^2\cdot e^x+e^2\lvert x+2\rvert}{e^2}\leq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow \frac{\cancel{e^2}\cdot xe^x}{\cancel{e^2}}+\frac{\cancel{e^2}\cdot e^x}{\cancel{e^2}}+\frac{\cancel{e^2}\lvert x+2\rvert}{\cancel{e^2}}\leq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xe^x+e^x+\lvert x+2\rvert+\frac{1}{e^2}\leq 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x+\frac{1}{e^2}+\lvert x+2\rvert\leq 0 \Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{e^2}+\lvert x+2\rvert\leq 0$ (Γ)	**1**
	Όμως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ αφού είναι κοίλη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$. Άρα η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο -2 το $f'(-2)=-\frac{1}{e^2}$ οπότε $f'(x)\geq f'(-2) \Leftrightarrow f'(x)\geq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{e^2}\geq 0$. Επίσης $\lvert x+2\rvert\geq 0$ άρα $f'(x)+\frac{1}{e^2}+\lvert x+2\rvert\geq 0$	**2**
	$f'(x)+\frac{1}{e^2}+\lvert x+2\rvert=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)+\frac{1}{e^2}=0 \Leftrightarrow x=-2\right)$ και $(\lvert x+2\rvert=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$ Άρα η λύση της ανίσωσης είναι η $x=-2$.	**1**

Ασκηποπολις