ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

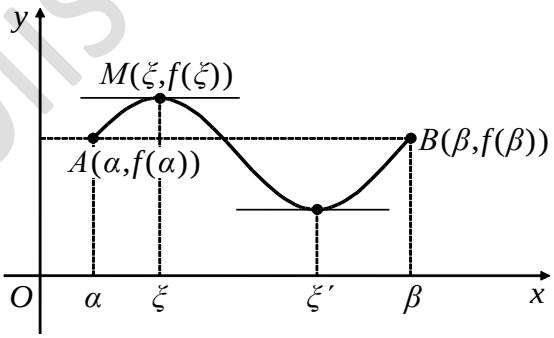
ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α.2 Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Β. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} 3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\overset{3x=u}{\underset{u\to 0^-}{=}} 3\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

β. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x\right)=3=\beta\Leftrightarrow \beta=3$$

Για κάθε $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(x^2+\alpha x+3\sigma\upsilon\nu x\right)'=2x+\alpha-3\eta\mu x$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\Leftrightarrow \pi+\alpha-3=\pi\Leftrightarrow \alpha=3.$$

γ. $\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}\left(x^2+3x+3\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+3\eta\mu x\right]_0^{\pi}=\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{3\pi^2}{2}$.

askisopolis

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x-\frac{e}{x}$ και $f''(x)=e^x+\frac{e}{x^2}$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>f'(1)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

β. Για κάθε $0<x<1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=e$, άρα $f(x)\geq f(1)=e$ για κάθε $x>0$.

γ. $\int_{x^2+1}^{x^2+2}f(t)dt=\int_{x^2+3}^{x^2+2}f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt \Leftrightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2}f(t)dt-\int_{x^2+3}^{x^2+2}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0 \Leftrightarrow$

$\int_{x^2+1}^{x^2+2}f(t)dt+\int_{x^2+2}^{x^2+3}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0 \Leftrightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+3}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$.

Εστω $g(x)=\int_{x^2+1}^{x^2+3}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=\int_{x^2+1}^{1}f(t)dt+\int_1^{x^2+3}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt \Leftrightarrow$

$g(x)=\int_1^{x^2+3}f(t)dt-\int_1^{x^2+1}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt$, $x>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και οι συναρτήσεις x^2+1, x^2+3 είναι παραγωγίσιμες, οι συναρτήσεις $\int_1^{x^2+3}f(t)dt, \int_1^{x^2+1}f(t)dt$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=2xf(x^2+3)-2xf(x^2+1)=2x\left(f(x^2+3)-f(x^2+1)\right)$.

Είναι $x^2+3>x^2+1>1, (x>0)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ έχουμε:

$f(x^2+3)>f(x^2+1) \Leftrightarrow g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $g(1)=\int_{1^2+1}^{1^2+3}f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $z_2-z_1=\frac{2-\alpha+\beta i}{2+\alpha-\beta i}-\alpha-\beta i=\frac{[(2-\alpha)+\beta i][(2+\alpha)+\beta i]}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha-\beta i \Leftrightarrow$

$z_2-z_1=\frac{(2-\alpha)(2+\alpha)+(2-\alpha)\beta i+(2+\alpha)\beta i-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha-\beta i \Leftrightarrow$

$z_2-z_1=\frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{2\beta-\cancel{\alpha\beta}+2\beta+\cancel{\alpha\beta}}{(2+\alpha)^2+\beta^2}i-\alpha-\beta i \Leftrightarrow$

$z_2-z_1=\left(\frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha\right)+\left(\frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\beta\right)i$

Επειδή $z_2-z_1\in\mathbb{R}$ είναι $\mathrm{Im}(z_2-z_1)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\beta=0 \Leftrightarrow \frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}=\beta \overset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}$

askisopolis

$4=(2+\alpha)^2+\beta^2 \Leftrightarrow 4=\alpha^2+4\alpha+4+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=-4\alpha$

Τότε $z_2-z_1=\left(\frac{4+4\alpha}{4}-\alpha\right)+0i=\frac{\cancel{4}(1+\alpha)}{\cancel{4}}-\alpha=1+\alpha-\alpha=1.$

β. Επειδή $(2+\alpha)^2+\beta^2=4$, οι συντεταγμένες της εικόνας Μ του z επαληθεύουν την εξίσωση $(x+2)^2+y^2=4$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι κύκλος με κέντρο $K(-2,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, εκτός του σημείου (0,0) αφού $\beta\neq 0$.

γ. $z_1^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$

Επειδή ο z_1^2 είναι φανταστικός, ισχύει ότι: $\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2 \Leftrightarrow \alpha=\pm\beta$.

Όμως $\alpha\beta>0$, δηλαδή οι α,β είναι ομόσημοι, άρα $\alpha=\beta$ και $z_1=\alpha+\alpha i$.

Τότε $(z_1+1+i)^{20}-(\bar{z}_1+1-i)^{20}=(\alpha+\alpha i+1+i)^{20}-(\alpha-\alpha i+1-i)^{20}=$

$$=\left[\alpha(1+i)+(1+i)\right]^{20}-\left[\alpha(1-i)+(1-i)\right]^{20}=$$
$$=\left[(1+i)(\alpha+1)\right]^{20}-\left[(1-i)(\alpha+1)\right]^{20}=$$
$$=(1+i)^{20}(\alpha+1)^{20}-(1-i)^{20}(\alpha+1)^{20}=$$
$$=\left[(1+i)^2\right]^{10}(\alpha+1)^{20}-\left[(1-i)^2\right]^{10}(\alpha+1)^{20}=$$
$$=(\cancel{1}+2i-\cancel{1})^{10}(\alpha+1)^{20}-(\cancel{1}-2i-\cancel{1})^{10}(\alpha+1)^{20}=$$
$$=(2i)^{10}(\alpha+1)^{20}-(-2i)^{10}(\alpha+1)^{20}=$$
$$=2^{10}i^{10}(\alpha+1)^{20}-2^{10}i^{10}(\alpha+1)^{20}=0$$

askisopolis