# ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
# ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
# ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α.1.** Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της $f$ στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Εστω G είναι μια άλλη παράγουσα της $f$ στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά $c$ τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

**Α.2.** Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$.

**Α.3.** Εστω μία συνάρτηση $f$ συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

**Α.4.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β.1.** $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z\cdot z+z\cdot\dfrac{2}{z}=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2=-4<0$, οπότε οι ρίζες της είναι

$$z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=\begin{cases} z_1\ 1+i \\ z_2\ 1-i\end{cases}$$

**Β.2.** <u>1ος τρόπος</u>

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=\left(1+2i+i^2\right)^{1005}+\left(1-2i+i^2\right)^{1005}\Leftrightarrow$$

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=\left(\cancel{1}+2i-\cancel{1}\right)^{1005}+\left(\cancel{1}-2i-\cancel{1}\right)^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[i\left(\frac{1}{i}+1\right)\right]^{2010}+(1-i)^{2010}=i^{2010}\left(\frac{i}{i^2}+1\right)^{2010}+(1-i)^{2010}\Leftrightarrow$$

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=i^{4\cdot 502+2}(-i+1)^{2010}+(1-i)^{2010}=i^2(1-i)^{2010}+(1-i)^{2010}=-(1-i)^{2010}+(1-i)^{2010}=0$$

<u>3ος τρόπος</u>

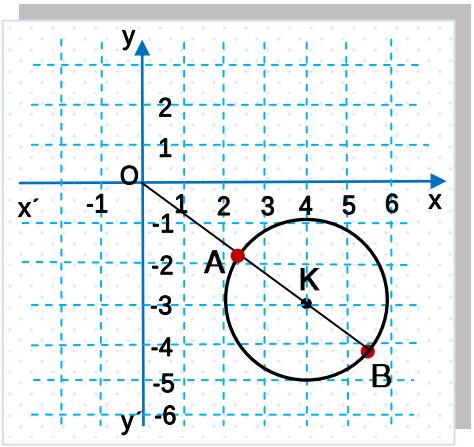
askisopolis

Παρατηρούμε ότι $iz_1 = i(1+i) = i + i^2 = -1 + i = -z_2 \Leftrightarrow z_2 = -iz_1$, άρα

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = z_1^{2010} + (-iz_1)^{2010} = z_1^{2010} + i^{2010} \cdot z_1^{2010} = z_1^{2010} + i^{4\cdot 502+2} \cdot z_1^{2010} = z_1^{2010} - z_1^{2010} = 0$$

**Β.3.** $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - (4-3i)| = |1 + i - 1 + i| = |2i| \Leftrightarrow |w - (4-3i)| = 2$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι κύκλος με κέντρο το $K(4,-3)$ και ακτίνα $\rho = 2$.




**Β.4.** $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = 5$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

$|w|_{min} = (OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3$ και

$|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7$

Είναι $|w|_{min} \le |w| \le |w|_{max} \Leftrightarrow 3 \le |w| \le 7$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(2x + \ln(x^2+1)\right)' = 2 + \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = 2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Γ.2.**

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln\left[(x^2)^2+1\right] = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = f(3x-2) \ (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και 1-1, οπότε η (1) γίνεται:

$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

**Γ.3.** Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Είναι $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ge 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow |x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[-1,1]$.

Είναι $f(-1) = -2 + \ln 2$, $f(1) = 2 + \ln 2$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| f | | ∩ | Σ.Κ | ∪ | Σ.Κ | ∩ | |

askisopolis

Η f έχει σημεία καμπής τα $A(-1,-2+\ln 2)$ και $B(1,2+\ln 2)$.

Είναι $f'(-1)=2+\frac{-2}{2}=1,\ f'(1)=2+\frac{2}{2}=3$.

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon_1$ με εξίσωση $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow$

$$y=x+\ln 2-1$$

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο Β είναι η ευθεία $\varepsilon_2$ με εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$$y=3x+\ln 2-1$$

Για $x=0$ και στις δύο εφαπτομένες προκύπτει $y=\ln 2-1$, οπότε οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0,\ln 2-1)$ που βρίσκεται στον άξονα y΄y.

**Γ.4.** $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} x\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-1}^{1} 2x^2dx+\int_{-1}^{1} x\ln\left(x^2+1\right)dx\Leftrightarrow$

$$I=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx\Leftrightarrow$$

$$I=2\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{x^2+1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{4}{3}+\frac{2}{2}\ln 2-\frac{2}{2}\ln 2-\int_{-1}^{1} xdx=\frac{4}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ.1.** Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $f(t)-t$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η $\frac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, άρα η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt\right)'=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)-x+x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}$$

**Δ.2.** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι $f^2(x)$ και $2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο αντίστοιχα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\left[f^2(x)-2xf(x)\right]'=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)\Leftrightarrow$

$$g'(x)=2f(x)\cdot\frac{f(x)}{f(x)-x}-2f(x)-2x\cdot\frac{f(x)}{f(x)-x}=\frac{2f^2(x)-2f(x)\left[f(x)-x\right]-2xf(x)}{f(x)-x}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{2f^2(x)-2f^2(x)+2xf(x)-2xf(x)}{f(x)-x}=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$$

askisopolis

**Δ.3.** Είναι $f(0)=0+3+\int_0^0 \frac{t}{f(t)-t}dt=3$ και $g(0)=f^2(0)-2\cdot 0\cdot f(0)=9$, όμως $g(0)=c$, άρα $c=9$ και $g(x)=9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)=9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$

$$(f(x)-x)^2=x^2+9 \ (1)$$

Επειδή $f(x)\neq x$ είναι $h(x)=f(x)-x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(0)=f(0)-0=3>0$, είναι $h(x)=f(x)-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

**Δ.4.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)'=1+\frac{(x^2+9)'}{2\sqrt{x^2+9}}=1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Είναι $x^2+9>x^2\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)>0$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**<u>1ος τρόπος</u>**

Θωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ a\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ άρα η F είναι και συνεχής.

Για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[x,x+1]$ και $[x+1,x+2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(x,x+1)$ και $\xi_2\in(x+1,x+2)$, τέτοια ώστε:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}=\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x+1}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1)=\int_x^{x+1}f(t)dt \text{ και}$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-(x+1)}=\int_a^{x+2}f(t)dt-\int_a^{x+1}f(t)dt=\int_a^{x+2}f(t)dt+\int_{x+1}^a f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_2)=\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$$

Είναι $x<\xi_1<x+1<\xi_2<x+2$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$f(\xi_1)<f(\xi_2) \Leftrightarrow \int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$$

**<u>2ος τρόπος</u>**

Όταν $x<t<x+1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x)<f(t)<f(x+1)$, οπότε και

$$\int_x^{x+1}f(x)dt<\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_x^{x+1}f(x+1)dt \Leftrightarrow$$

askisopolis

$$f(x)\int_x^{x+1}dt<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x+1)\int_x^{x+1}dt\Leftrightarrow$$
$$f(x)(x+1-x)<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x+1)(x+1-x)\Leftrightarrow$$
$$f(x)<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x+1)\quad(1)$$

Όταν $x+1<t<x+2$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x+1)<f(t)<f(x+2)$, οπότε και

$$\int_{x+1}^{x+2}f(x+1)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(x+2)dt\Leftrightarrow$$
$$f(x+1)\int_{x+1}^{x+2}dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt<f(x+2)\int_{x+1}^{x+2}dt\Leftrightarrow$$
$$f(x+1)(x+2-x-1)<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt<f(x+2)(x+2-x-1)\Leftrightarrow$$
$$f(x+1)<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt<f(x+2)\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι: $f(x)<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x+1)<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt<f(x+2)$,

άρα $\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$

**<u>3ος τρόπος</u>**

Θωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_x^{a}f(t)dt+\int_a^{x+1}f(t)dt=\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη, και η συνάρτηση $x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\int_a^{x+1}f(t)dt$, $\int_a^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\left(\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right)'=f(x+1)-f(x)$.

Είναι $x<x+1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα $f(x)<f(x+1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $x<x+1$, άρα $g(x)<g(x+1)\Leftrightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$.

**<u>4ος τρόπος</u>**

Θωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_x^{a}f(t)dt+\int_a^{x+1}f(t)dt=\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη, και η συνάρτηση $x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\int_a^{x+1}f(t)dt$, $\int_a^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\left(\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right)'=f(x+1)-f(x)$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$.

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και $f'(\xi)>0\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)>0\Leftrightarrow g'(\xi)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $x<x+1$, άρα $g(x)<g(x+1)\Leftrightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt$.

askisopolis

**5ος τρόπος**

Στο ολοκλήρωμα $\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ θέτουμε $t=u+1$. Τότε $dt=du$ και για $t=x+1$ είναι $u=x$, ενώ για $t=x+2$ είναι $u=x+1$. Είναι $\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt=\int_{x}^{x+1} f(u+1)du=\int_{x}^{x+1} f(t+1)dt$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $t<t+1$ είναι $f(t)<f(t+1) \Leftrightarrow f(t+1)-f(t)>0$

άρα και $\int_{x}^{x+1}\left[f(t+1)-f(t)\right]dt>0 \Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f(t+1)dt-\int_{x}^{x+1} f(t)dt>0 \Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f(t)dt<\int_{x}^{x+1} f(t+1)dt$

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis