Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026

Αντώνης Βαλέργας **Γαβριήλ Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς **Νίκος Κουμάντος**
Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**
Θανάσης Νικολόπουλος **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Δημήτρης Πατσιμάς **Νίκος Σαμπάνης**
Βαγγέλης Τόλης **Νίκος Τούντας** **Ισαάκ Χιονίδης**

5ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από την ομάδα του Ασκησόπολις

Διάρκεια: 3 ώρες

Ύλη: 1ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = [G(x)]_\alpha^\beta = G(\beta)-G(\alpha)$.

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1 + 3 = 4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη.

β) Αν f, g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο Δ και ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε και $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Αν F, G δύο παράγουσες μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $F(x)=G(x)+c$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

6 μονάδες

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

7 μονάδες

Β3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

6 μονάδες

Β4. Αν G μια αρχική στο $\mathbb{R}$ της $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ με $G(1)=\dfrac{\pi}{2}$, τότε να υπολογίσετε το $\int_0^1 G(x)dx$.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $e^{f(1)}+f(1)-1=0$
- $g^3(x)+g(x)=x-1$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.
- $(x-1)f(x)\le x^3-5x^2+7x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1+2h)}{h}\le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $f(1)=g(1)=0$.

6 μονάδες

Γ2. $f'(1)=-2$.

7 μονάδες

Γ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=1$.

5 μονάδες

Γ4. Η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}-g(4x-3), & x<1\\ f(2x-1) & ,x\ge 1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $h'(1)=-4$.

7 μονάδες

Θέμα Δ

Έστω πολυώνυμο $f(x)$ για το οποίο ισχύει $f(x)-f'(x)=\dfrac{x^4}{24}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο είναι τετάρτου βαθμού και ότι η παράγωγος από πέμπτης τάξης και επάνω είναι 0.

3 + 1 = 4 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

4 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει μοναδικό ακρότατο του οποίου η θέση ανήκει στο διάστημα $(-2,-1)$ και να βρείτε το είδος του.

7 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>2026$.

4 μονάδες

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $f(x)$ και $g(x)=f(x)+\dfrac{x(x-1)(x-3)}{x-2}$.

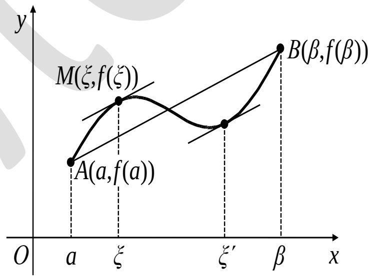
6 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.	Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.	**1**
	Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$ (1) .	**2**
	Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$ οπότε $c=G(\alpha)$.	**2**
	Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$ οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα προκύπτει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.	**2**

Α2.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.	**2**
	Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ. 	**2**

Α3.	**α)** Ψευδής	**1**
	β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in[-1,1]$. Είναι $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$, όμως η σχέση $f(x)=0$ ισχύει μόνο για $x=0$ και όχι για κάθε $x\in[-1,1]$.	**3**

Α4.	**α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό	**10**
	Αιτιολόγηση: (Δεν απαιτείται στις απαντήσεις των μαθητών) **α)** Η παράγωγος θα είναι περιττού βαθμού και εύκολα δείχνουμε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα έχει ρίζα, επομένως η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. (Για το σύνολο τιμών δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ ή αντιστρόφως ανάλογα με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Στην συνέχεια λόγω συνέχειας είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$). **β)** Έστω $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όμως $f'(x)=g'(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$. **γ)** ΘΕΩΡΙΑ **δ)** Έστω ότι $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε θα ίσχυε το θεώρημα Rolle και θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ πράγμα άτοπο, αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. **ε)** Είναι $f(-x)=\sqrt{\lvert -x\rvert}=\sqrt{\lvert x\rvert}=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι άρτια και έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.	

Θέμα Β

B1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ **1**

$f'(x)\geq 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} 1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ **2**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ άρα $f\searrow(-\infty,-1]$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f'(x)>0$ στο $(-1,1)$ άρα $f\nearrow[-1,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ άρα $f\searrow[1,+\infty)$. **2**

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-1$ το $f(-1)=-1$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=1$. **1**

B2.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(2-2x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[-4x(x^2+1)-4x(2-2x^2)\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{-4x^3-4x-8x+8x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$ **1**

$f''(x)>0\Leftrightarrow 4x(x^2-3)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ **2**

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^3$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-\sqrt{3}]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\infty,-\sqrt{3})$ άρα $f\frown(-\infty,-\sqrt{3}]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-\sqrt{3},0]$ και $f''(x)>0$ στο $(-\sqrt{3},0)$ άρα $f\smile[-\sqrt{3},0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\sqrt{3}]$ και $f''(x)<0$ στο $(0,\sqrt{3})$ άρα $f\frown[0,\sqrt{3}]$.

Η f είναι συνεχής στο $[\sqrt{3},+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(\sqrt{3},+\infty)$ άρα $f\smile[\sqrt{3},+\infty)$. **2**

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στα σημεία

$A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), O(0,0), B\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **2**

Β3.	Για $x<0 \Leftrightarrow 2x<0 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} \frac{2x}{x^2+1}<0 \Leftrightarrow f(x)<0$, ενώ $x>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.	**2**
	Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_{-1}^{1}\lvert f(x)\rvert dx=$	**1**
	$=\int_{-1}^{0}\lvert f(x)\rvert dx+\int_{0}^{1}\lvert f(x)\rvert dx=-\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=-\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx=$	**2**
	$=-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{1}=2\ln 2$ τ.μ.	**1**

Β4.	Είναι $G'(x)=g(x)$ οπότε $\int_0^1 G(x)dx=\int_0^1 (x)'G(x)dx=\left[xG(x)\right]_0^1-\int_0^1 xg(x)dx=$	**4**
	$=G(1)-\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-\ln 2$	**2**

Θέμα Γ

Γ1.	Είναι $g^3(x)+g(x)=x-1$ (1) Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $g^3(1)+g(1)=0 \Leftrightarrow g(1)\Big(\underbrace{g^2(1)+1}_{\neq 0}\Big)=0 \Leftrightarrow g(1)=0$.	**2**
	Είναι $e^{f(1)}+f(1)-1=0$ (2). Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$ και τότε η σχέση (2) γίνεται $\alpha(f(1))=\alpha(0)$.	**2**
	Η συνάρτηση α είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\alpha'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως $\alpha\nearrow\mathbb{R}$ και είναι 1-1. Άρα $\alpha(f(1))=\alpha(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=0$.	**2**

Γ2.	Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=f'(1)$ αφού $f(1)=0$.	**2**
	Είναι $(x-1)f(x)\le x^3-5x^2+7x-3$ (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση (3) για $x\neq1$ έχουμε $\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^3-5x^2+7x-3}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{\cancel{(x-1)^2}(x-3)}{\cancel{(x-1)^2}}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-1}\le x-3$ οπότε $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\le\lim_{x\to1}(x-3)\Leftrightarrow f'(1)\le-2$ (A).	**2**
	Είναι $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1+2h)}{h}\le 2$ (4) . Από τη σχέση (4) έχουμε $\lim_{x\to1}\left(\frac{f(1+h)}{h}-\frac{f(1+2h)}{h}\right)\le2\Leftrightarrow f'(1)-2f'(1)\le2\Leftrightarrow-f'(1)\le2\Leftrightarrow f'(1)\ge-2$ (B).	**2**
	(Είναι $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)}{h}\overset{u=2h}{\underset{\substack{h\to0,\,u\to0\\u\to0}}{=}}\lim\frac{f(1+u)}{\frac{u}{2}}=\lim_{u\to0}2\frac{f(1+u)}{u}=2f'(1)$)	**1**
	Από τις σχέσεις (A) ,(B) έχουμε $f'(1)=-2$.	

Γ3.	Από τη σχέση (1) για $x\neq1$ έχουμε $g(x)\Big(\underbrace{g^2(x)+1}_{\neq0}\Big)=x-1\Leftrightarrow\frac{g(x)}{x-1}=\frac{1}{g^2(x)+1}$.	**3**
	Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{g^2(x)+1}=\frac{1}{g^2(0)+1}=1$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=1$.	**2**

Γ4.	Είναι $h(1)=f(2\cdot1-1)=f(1)=0$.	**1**
	Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-g(4x-3)}{x-1}\overset{u=4x-3\Leftrightarrow x=\frac{u+3}{4}}{\underset{x\to1^-,\ u\to1^-}{=}}\lim\limits_{u\to1^-}\frac{-g(u)}{\frac{u+3}{4}-1}\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{u\to1^-}\left(-\frac{g(u)}{\frac{u-1}{4}}\right)=\lim\limits_{u\to1^-}\left(-4\frac{g(u)}{u-1}\right)=-4\cdot g'(1)=-4\cdot1=-4$.	**3**
	$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(2x-1)}{x-1}\overset{\theta=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{\theta+1}{2}}{\underset{x\to1^+,\ \theta\to1^+}{=}}\lim\limits_{\theta\to1}\frac{f(\theta)}{\frac{\theta+1}{2}-1}\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{\theta\to1^+}\left(\frac{f(\theta)}{\frac{\theta-1}{2}}\right)=\lim\limits_{\theta\to1^+}\left(2\frac{f(\theta)}{\theta-1}\right)=2f'(1)=2\cdot(-2)=-4$.	**3**
	Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $h'(1)=-4$.	

Θέμα Δ

Δ1.	Αν το $f(x)$ είναι σταθερό, τότε $f'(x)=0$ και η αρχική σχέση δεν ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	**1**
	Αν το $f(x)$ είναι ν-οστού βαθμού με $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε το $f'(x)$ είναι $\nu-1$ βαθμού οπότε το $f(x)-f'(x)$ είναι ν-οστού βαθμού.	**1**
	Όμως είναι ίσο με το $\frac{x^4}{24}$ το οποίο είναι $4^{ου}$ βαθμού άρα $\nu=4$.	**1**
	Αφού το f(x) είναι $4^{ου}$ βαθμού τότε το $f'(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, το $f''(x)$ $2^{ου}$ βαθμού, το $f^{(3)}(x)$ $1^{ου}$ βαθμού και $f^{(4)}(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο οπότε από $5^{ης}$ τάξης παράγωγο και πάνω είναι μηδενικό πολυώνυμο.	**1**

Δ2.	Είναι $f(x)-f'(x)=\frac{x^4}{24}$ άρα $f'(x)-f''(x)=\frac{x^3}{6}$, $f''(x)-f^{(3)}(x)=\frac{x^2}{2}$, $f^{(3)}(x)-f^{(4)}(x)=x$, $f^{(4)}(x)-f^{(5)}(x)=1\overset{f^{(5)}(x)=0}{\Leftrightarrow}f^{(4)}(x)=1$	**2**
	οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $f(x)=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.	**2**
	$2^{ος}$ τρόπος:	
	Αφού το $f(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού τότε $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq0$ και $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ άρα $f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f(x)-f'(x)=\alpha x^4+(\beta-4\alpha)x^3+(\gamma-3\beta)x^2+(\delta-2\gamma)x+\varepsilon-\delta$	**2**

	Και από την ισότητα πολυωνύμων με το $\frac{x^4}{24}$ θα είναι $\alpha=\frac{1}{24}$, $\beta-4\alpha=0 \overset{\alpha=\frac{1}{24}}{\Leftrightarrow} \beta=\frac{1}{6}$, $\gamma-3\beta=0 \overset{\beta=\frac{1}{6}}{\Leftrightarrow} \gamma=\frac{1}{2}$, $\delta-2\gamma=0 \overset{\gamma=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \delta=1$ και $\varepsilon-\delta=0 \overset{\delta=1}{\Leftrightarrow} \varepsilon=1$.	**2**
	Άρα $f(x)=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$, $x\in\mathbb{R}$	

Δ3.	Είναι $f(x)=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$, $f'(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$, $f''(x)=\frac{x^2}{2}+x+1>0$ (Δ<0, α>0) οπότε $f'\nearrow\mathbb{R}$.	**1**
	Είναι $f'(-2)=-\frac{8}{6}+\frac{4}{2}-2+1=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}<0$ και $f'(-1)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-1+1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}>0$. Αφού f' συνεχής στο $[-2,-1]$ και $f'(-2)f'(-1)<0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(-2,-1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.	**2**
	Για $x<x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0$ και f συνεχής στο $(-\infty,x_0]$ άρα $f\searrow(-\infty,x_0]$. Για $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$ και f συνεχής στο $[x_0,+\infty)$ άρα $f\nearrow[x_0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)$.	**4**

Δ4.	Είναι $\int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>2026 \Leftrightarrow \int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>[x]_0^{2026} \Leftrightarrow \int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>\int_0^{2026}1\,dx$	
	Για κάθε $0\le x\le 2026 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(0)=1 \Leftrightarrow f^{2025}(x)\ge 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.	**2**
	Άρα είναι $\int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>\int_0^{2026}1\,dx \Leftrightarrow \int_0^{2026} f^{2025}(x)dx>2026$.	**2**

Δ5.	Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)=\frac{x(x-1)(x-3)}{x-2}$, $x\ne 2$. Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-3)}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=3$.	**1**
	Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,2)$ και $(2,3]$. Επειδή δεν ορίζεται στο 2, τότε το μόνο κλειστό χωρίο που σχηματίζεται είναι στο διάστημα $[0,1]$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^1\lvert h(x)\rvert dx$.	**1**
	Για $x\in[0,1]$ θα είναι $x\ge 0$, $x-1\le 0$, $x-3<0$ και $x-2<0$ άρα $h(x)\le 0$ στο $[0,1]$, επομένως $E=-\int_0^1 h(x)dx$.	**1**
	Είναι $h(x)=\frac{x(x-1)(x-3)}{x-2}=\frac{x(x^2-4x+3)}{x-2}=\frac{x^3-4x^2+3x}{x-2}$ Εκτελούμε την διαίρεση πολυωνύμων:	**2**

	$$\begin{array}{r\|l} x^3-4x^2+3x & x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2 & x^2-2x-1 \\ \cline{1-1} -2x^2+3x & \\ 2x^2-4x & \\ \cline{1-1} -x & \\ x-2 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$ Άρα $h(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-2x-1)-2}{x-2}=x^2-2x-1-\dfrac{2}{x-2}$	
	Επομένως $E=-\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\left(\dfrac{2}{x-2}-x^2+2x+1\right)dx=$ $=\left[2\ln\|x-2\|-\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^1=2\ln1-\dfrac{1}{3}+1+1-2\ln2=2-\dfrac{1}{3}-2\ln2=\dfrac{5}{3}-2\ln2$ τ.μ.	**1**