

Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2020 - 2021



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5ο Διαγώνισμα

29-3-2021

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

μονάδες 7

A2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

μονάδες 6

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε:

A. $x_0 = 0$ B. $x_0 = 2$ Γ. $x_0 = -1$ Δ. $x_0 = 1$

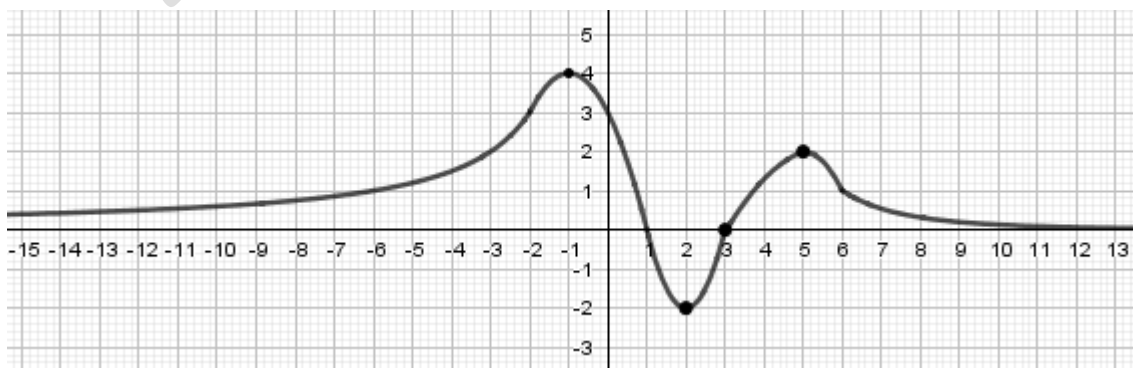
β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε:

A. $f(1) = -1$ B. $f(-1) > 0$ Γ. $f(1) > 0$ Δ. $f(-1) = 0$

μονάδες 4

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και οι τιμές $f(-1) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 0$, $f(3) = -2$, $f(5) = 1$.



- B1.** Να μελετήσετε τη f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. μονάδες 4
- B2.** Να μελετήσετε τη f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής. μονάδες 4
- Έστω επιπλέον ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 2) = 0$.
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f μονάδες 3
- B4.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών τη f . μονάδες 5
- B5.** Να σχεδιάσετε την C_f με βάση τα παραπάνω δεδομένα. μονάδες 4
- B6.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) + f(x) = 3f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(1, +\infty)$. μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η ορισμένη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Η f αντιστρέφεται και έχει ως αντίστροφη την f^{-1} .
- Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού τους και ισχύει η σχέση:

$$f(x) - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^2} - f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \in D_f \cap D_{f^{-1}}.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η f και η f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας. μονάδες 5
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. μονάδες 6
- Γ3.** Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$, να αποδείξετε ότι:
- α)** ορίζεται το $A = f\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right] + f^{-1}\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.
- β)** η ανίσωση $\frac{1}{x^2\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{\sqrt{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}} < 2$ δεν έχει λύση. μονάδες 2+6
- Γ4.** Έστω η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να αποδείξετε ότι:
- α)** η συμμετρική ευθεία της $y = \alpha$ ως προς την ευθεία $y = x$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.
- β)** αν η f είναι συνεχής τότε $\alpha = 0$. μονάδες 3+3

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x^2 e^{|x|^3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

- Δ1.** Να βρείτε το σύνολο των συναρτήσεων f που ικανοποιούν την (1). μονάδες 8
- Δ2.** Αν το γινόμενο $f(-2) \cdot f(2)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του να βρείτε τον τύπο της f . μονάδες 3
- Δ3.** Έστω $f(x) = \begin{cases} e^{x^3} - 1 & , x \geq 0 \\ -e^{-x^3} + 1 & , x < 0 \end{cases}$.
- α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 διαπερνά την καμπύλη της f . μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, e-1)$ και να αποδείξετε ότι έχει κι άλλο κοινό σημείο με την C_f στο οποίο όμως δεν είναι εφαπτομένη.

μονάδες 9

Καλή Τύχη!

Askisopolis

Θέμα Α

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο

του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε

το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

A3. α) Ψευδής

β) Είναι $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση

f^{-1} της f . Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

- έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
- έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} και
- αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $a^x = y$. Επειδή όμως

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

θα είναι $f^{-1}(y) = \log_a y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$. Συνεπώς $\log_a a^x = x$, $x \in \mathbb{R}$ και $a^{\log_a x} = x$, $x \in (0, +\infty)$

A4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ

A5. α) Δ **β)** Γ

Θέμα Β

B1. Για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 4$, τοπικό ελάχιστο το $f(3) = -2$.

B2. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[2, 5]$, οπότε η f είναι κυρτή στα διαστήματα αυτά.

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 2]$, $[5, +\infty)$, οπότε η f είναι κοίλη στα διαστήματα αυτά.

Η f έχει σημεία καμπής τα $(-1, f(-1)) \equiv (-1, 1)$, $(2, f(2)) \equiv (2, 0)$ και $(5, f(5)) \equiv (5, 1)$.

B3. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 2) = 0$, η ευθεία $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. Έστω $f(x) - x + 2 = h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) + x - 2$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + x - 2) = -\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, 1)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, η f έχει ακριβώς μια ρίζα x_1 στο Δ_1 .

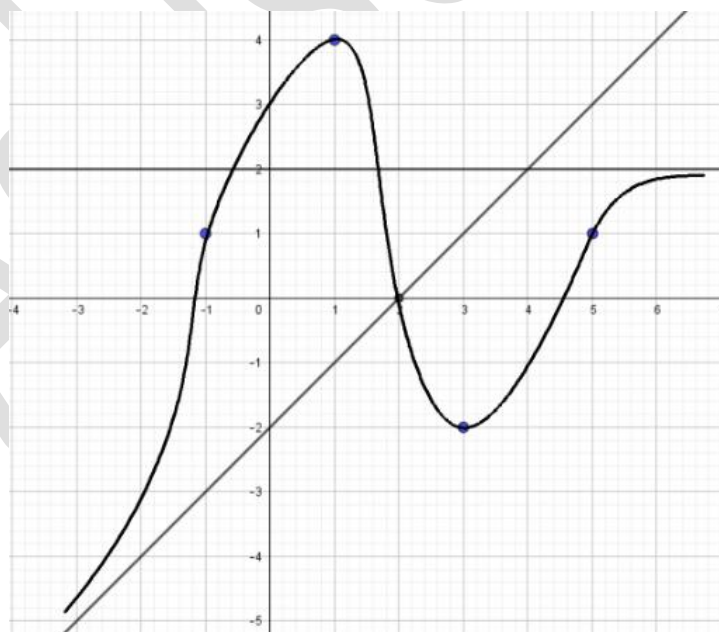
Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, 3)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-2, 4)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$, η f έχει ακριβώς μια ρίζα x_2 στο Δ_2 .

Στο διάστημα $\Delta_3 = (3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3) = (-2, 2)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_3)$, η f έχει ακριβώς μία ρίζα x_3 στο Δ_3 .

Τελικά η f έχει τρεις ρίζες.

B5.

x	$-\infty$	-1	1	2	3	5	$+\infty$
f'	+ ↗	+ ↘	- ↘	- ↗	+ ↗	+ ↘	
f	↗	↘	↘	↘	↗	↘	↘



B6. $xf'(x) + f(x) = 3f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - 3f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) + f(x) = 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x-3)f(x)$, $x \geq 1$.

Είναι $g(2) = -f(2) = 0$, $g(3) = 0$ και $g(x_3) = (x_3 - 3)f(x_3) = 0$.

Είναι $g(2) = g(3) = g(x_3)$ και η g είναι συνεχής στα $[2, 3]$, $[3, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(2, 3)$, $(3, x_3)$,

με $g'(x) = (x-3)f'(x) + f(x)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(2,3)$, $(3, x_3)$, δηλαδή έχει τουλάχιστον ρίζες στο $(1, +\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε: Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geq x_2 \text{ Άτοπο}$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Ομοίως αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Γ2. $f(x) - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^2} - f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x}$ για κάθε $x \in \text{Df} \cap \text{Df}^{-1} = (0, +\infty)$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{(\sqrt{x})'}{x} = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0 \text{ άρα } g \searrow (0, +\infty).$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & (1) \\ f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) & (2) \end{cases} \stackrel{(1)+(2)}{\Rightarrow}$

$$\stackrel{(1)+(2)}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty).$$

Το οποίο είναι άτοπο.

Άρα θα είναι γνησίως φθίνουσες.

Γ3. α) Είναι $x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ άρα $\frac{1}{\pi} < x < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{1}{x} < \pi \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} \chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

Άρα ορίζεται το $A = f\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f^{-1}\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

β) Είναι $\frac{1}{x^2 \eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{\sqrt{\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}} < 2 \Leftrightarrow g\left[\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right] < g(1) \Leftrightarrow \chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 1$ δεν έχει λύση γιατί:

Είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$ και για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Σύμφωνα με την παραπάνω βασική ανισότητα αν θέσουμε για x το $\frac{1}{x} > 0$ είναι:

$$-\frac{1}{x} < \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Γ4. α) Αφού η ευθεία $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (3)

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) \stackrel{f(x)=u, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\alpha}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} f^{-1}(u)$ δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x)$$

Άρα από την (3) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x) = +\infty$ οπότε η ευθεία $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ και η συγκεκριμένη ευθεία είναι συμμετρική της $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ως προς την ευθεία $y = x$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το

$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$. Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ οπότε $\alpha = 0$.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x \geq 0$ $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} \Leftrightarrow f'(x) = (e^{x^3})'$ άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = e^{x^3} + c_1$.

Για $x < 0$ $f'(x) = 3x^2 e^{-x^3} \Leftrightarrow f'(x) = (-e^{-x^3})'$ άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = -e^{-x^3} + c_2$.

Η f είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + c_1 = -1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = c_1 + 2. \text{ οπότε } f(x) = \begin{cases} e^{x^3} + c & , x \geq 0 \\ -e^{-x^3} + c + 2 & , x < 0 \end{cases}$$

($c = c_1$)

Δ2. $f(-2) \cdot f(2) = (-e^8 + c + 2)(e^8 + c) = -e^{16} - e^8 c + e^8 c + c^2 + 2e^8 + 2c = c^2 + 2c + 2e^8 - e^{16}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^2 + 2x + 2e^8 - e^{16}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = 2x + 2$

Για κάθε $x < -1$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$.

Για κάθε $x > -1$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

Η g έχει ελάχιστο για $x = -1$, άρα $f(x) = \begin{cases} e^{x^3} - 1 & , x \geq 0 \\ -e^{-x^3} + 1 & , x < 0 \end{cases}$.

Δ3. α. $f'(x) = 3x^2 e^{|x|^3} = \begin{cases} 3x^2 e^{-x^3} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 3x^2 e^{x^3} & , x > 0 \end{cases}$

Για $x < 0$ $f''(x) = (3x^2 e^{-x^3})' = 3xe^{-x^3} (2 - 3x^3) < 0$

Για $x > 0$ $f''(x) = (3x^2 e^{x^3})' = 3xe^{x^3} (2 + 3x^3) > 0$

Για $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 e^{-x^3}}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-} 3xe^{-x^3} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 e^{x^3}}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} 3xe^{x^3} = 0$

Άρα $f''(0) = 0$. Τελικά η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$, οπότε στο σημείο αυτό η εφαπτομένη διαπερνά την C_f .

β) ε: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon : y = 3ex - 2e - 1$.

Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την ε για $x \geq 0$.

Για $x < 0$ Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 3ex - 2e - 1 \Leftrightarrow -e^{-x^3} + 1 = 3ex - 2e - 1 \Leftrightarrow -e^{-x^3} - 3ex + 2e + 2 = 0$

Θεωρούμε $g(x) = -e^{-x^3} - 3ex + 2e + 2$, $x < 0$

$g'(x) = 3x^2 e^{-x^3} - 3e$, $g'(-1) = 0$ και $g''(x) = (3x^2 e^{-x^3})' = 3xe^{-x^3} (2 - 3x^3) < 0$, άρα g' γνησίως φθίνουσα.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(-1) \stackrel{g' \nearrow}{\Leftrightarrow} x < -1.$$

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, άρα $g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = (-\infty, 4e + 2]$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x^3} - 3ex + 2e + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(-\frac{e^{-x^3}}{x} - 3e + \frac{2e+2}{x} \right) = -\infty \cdot (+\infty - 3e) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x^3}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 \cdot e^{-x^3}) = -3 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Το $0 \in g(\Delta_1)$ και g γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-\infty, -1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (-1, 0)$, άρα

$$g(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \right) = (2e - 1, 4e + 2).$$

Το $0 \notin g(\Delta_2)$ άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta_2$.

Τελικά η ε τέμνει την C_f σε ένα ακόμη σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-\infty, -1)$.

Για να εφάπτεται η ε στην C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ πρέπει επιπλέον $f'(x_0) = 3e$.

Παρατηρούμε ότι $f'(-1) = 3e$ και για $x < 0$ $f''(x) = (3x^2 e^{-x^3})' = 3xe^{-x^3} (2 - 3x^3) < 0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα οπότε $x_0 = -1$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x) = 3e$ που είναι μη αποδεκτή γιατί $x_0 \in (-\infty, -1)$.