ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 3

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο Δ

(β) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

(γ) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ Ισχύει $f^{-1}\left(f\left(y\right)\right) = y$, $y \in A$

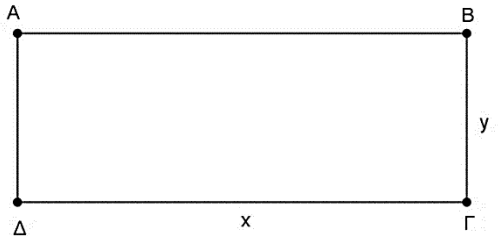
(δ) Αν οι συναρτήσεις f', g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

(ε) Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f(x)\right) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις x, y και σταθερή περίμετρο $8m$.



Β1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι :

$$E(x) = -x^2 + 4x, x \in (0,4)$$

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του γίνεται μέγιστο όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2,5)$

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)\cdot E(x) - 4E'(x)}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + f(\alpha) & , \ x > 0 \\ x\left(e^x + 1\right) + \alpha & , \ x \le 0 \end{cases} \quad \text{με } \alpha \le 0 \text{ και } \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 2$

Μονάδες 4

Γ2. (i) Να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 5

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - f(-2) = (x+2)\lim_{h \to 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h}$$

Μονάδες 3

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(f(x)) = 2025$

Μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ε και την ευθεία $x = -1$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$ με $A = (0, +\infty)$

Δ1. Να δείξετε ότι η f έχει μόνο μία οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \alpha \cdot e^x - x$, $x \in A$ παρουσιάζει ακρότατο στο κρίσιμο σημείο της f

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g\left(2\alpha+f\left(x\right)\right)-g\left(1+f\left(\alpha\right)\right)}{g\left(x\right)-e^{\alpha}-1}$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω F αρχική της συνάρτησης $h\left(x\right)=g\left(x^2\right)-f\left(x^2\right),\ x\in\left(0,+\infty\right)$

για την οποία ισχύει ότι $e^x\geq\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}F\left(t\right)dt\right)x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με

$\beta>\alpha>0$ να δείξετε ότι

i. $\int\limits_{\alpha}^{\beta}F\left(x\right)dx=1$

Μονάδες 5

ii. $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(x-\alpha\right)\left(\alpha e^{x^2}-x^2\right)dx=\left(\beta-\alpha\right)F\left(\beta\right)-1$

Μονάδες 5

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 162

Α3. Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου.

Α4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ότι η περίμετρος του είναι 8cm ισχύει ότι

$$2x+2y=8 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$$

Για το εμβαδόν του ισχύει $E=x\cdot y$ άρα $E(x)=x\cdot(4-x) \Leftrightarrow E(x)=-x^2+4x$

Πρέπει $x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow 4-x>0 \Leftrightarrow x<4$

Επομένως $E(x)=-x^2+4x, x\in(0,4)$

Β2. Η $E(x)$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,4)$ με $E'(x)=-2x+4$

- $E'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$
- $E'(x)>0 \Leftrightarrow -2x+4>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$

Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα πρόσημου της $E'(x)$ και μονοτονίας της $E(x)$

x	0	2	4
$E(x)$	$+$	0	$-$
$E'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Στο διάστημα $(0,2]$ η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[2,4)$ η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στη θέση $x=2$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο με τιμή $E(2)=4m^2$ ενώ όταν $x=2$ τότε και $y=2$, άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Β3. Έστω $M(x_0,E(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ με $x_0\in(0,4)$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο Μ είναι $(\varepsilon): y-E(x_0)=E'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(2,5)$ **άρα** $(\varepsilon): 5-E(x_0)=E'(x_0)\cdot(2-x_0)$

Αντικαθιστώντας τα $E(x_0)=-x_0^{\,2}+4x_0$ και $E'(x_0)=-2x_0+4$

Έχουμε $5+x_0^{\,2}-4x_0=(-2x_0+4)\cdot(2-x_0)\Leftrightarrow x_0^{\,2}-4x_0+3=0\Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=3$

Άρα $(\varepsilon_1): y-E(1)=E'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x+1$

$(\varepsilon_2): y-E(3)=E'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-3=-2(x-3)\Leftrightarrow y=-2x+9$

Β4. Για το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)\cdot E(x)-4E'(x)}$ έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)\cdot E(x)-4E'(x)}=\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)}\right)\cdot\frac{1}{E(x)-4}\right]=-\infty \text{ διότι :}$$

- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)}\right)$ θέτουμε $E'(x)=u$ και $u_0=\lim\limits_{x\to 2}E'(x)=0$ άρα $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=1$
- Η $E(x)$ έχει μέγιστο το 4 άρα ισχύει $E(x)\le 4$ για κάθε $x\in(0,4)$

Για τιμές του x κοντά στο 2 ισχύει $E(x) < 4 \Leftrightarrow E(x) - 4 < 0$

και $\lim\limits_{x\to 2}\left(E(x)-4\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{E(x)-4}=-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \textbf{(I)}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\left(e^x+1\right)+\alpha\right)=\alpha$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\beta x+f(\alpha)\right)=f(\alpha)$
- $f(0)=\alpha$

Άρα από την σχέση **(I)** έχουμε ότι

$$f(\alpha)=\alpha \overset{\alpha\le 0}{\Leftrightarrow} \alpha\left(e^\alpha+1\right)=\alpha \Leftrightarrow \alpha e^\alpha+\alpha=\alpha \Leftrightarrow \alpha e^\alpha=0 \overset{e^\alpha\ne 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha=0}$$

Η f παραγωγίσιμη στο $x=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=L\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=\alpha=0}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(e^x+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\beta x+f(\alpha)}{x} \overset{f(\alpha)=0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\beta x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+\beta)}{x}=\beta$$

Επομένως $\boxed{\beta=2}$

Γ2. (i) Για $\alpha=0$ και $\beta=2$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x>0 \\ xe^x+x, & x\le 0\end{cases}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\begin{cases} 2x+2, & x>0 \\ e^x+xe^x+1, & x\le 0\end{cases}$

Για $x>0$ έχουμε $f''(x)=2$ άρα η f κυρτή στο $[0,+\infty)$

Για $x<0$ έχουμε $f''(x)=e^x(x+2)$

Άρα $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x+2)=0 \overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με το πρόσημο του $x+2$ εφόσον $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+		+
$f(x)$	∩		∪		∪

Άρα η f κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και η f κυρτή στο $[-2,+\infty)$

Το σημείο $M(-2,f(-2))$ ή $M(-2,-2e^{-2}-2)$ είναι το σημείο καμπής της f .

(ii) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(h-2)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$

Άρα η εξίσωση γίνεται $f(x)-f(-2)=(x+2)\cdot f'(-2) \Leftrightarrow f(x)=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο καμπής της.

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της διαπερνά την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Η f κυρτή στο διάστημα $(-2,+\infty)$ άρα $f(x)>f(-2)(x+2)+f(-2)$ για κάθε $x>-2$

Η f κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-2)$ άρα $f(x)<f(-2)(x+2)+f(-2)$ για κάθε $x<-2$

Άρα η εξίσωση $f(x)=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ έχει μοναδική λύση την $x=-2$

Γ3.(i) Από το πρόσημο της f'' προκύπτει η μονοτονία της f'

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+		+
$f'(x)$	↘		↗		

Η f' είναι συνεχής στο $x=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 2$

Η f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$

Στη θέση $x=-2$ έχει ολικό ελάχιστο το $f'(-2) = -\dfrac{1}{e^2}+1>0$

Άρα $f'(x)\ge f'(-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f συνεχής το $A=(-\infty,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα άρα :

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

διότι :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(e^x+1\right)\right) = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

(ii) Η εξίσωση $f(f(x)) = 2025$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αφού $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\in\mathbb{R}$

Το 2025 ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα θα υπάρχει $x_o\in A=\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2025$, το x_0 μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

$$f(f(x)) = 2025 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x_0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = x_0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μία μόνο λύση αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, δηλαδή η ευθεία $y=x_0$ τέμνει την C_f ακριβώς μία φορά .

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

Πράγματι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}+x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{x}\right)=0$$

Τα κοινά σημεία της $f(x)$ με την $y=x$ είναι $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|xe^{x}\right|dx=\int_{-1}^{0}-xe^{x}dx=\int_{-1}^{0}-x\left(e^{x}\right)'dx=\left[-xe^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{x}dx$$

$$=\left[-xe^{x}\right]_{-1}^{0}+\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}=\left[e^{x}-xe^{x}\right]_{-1}^{0}=1-\left(e^{-1}+e^{-1}\right)=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}\,\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο Α με $f'(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$

- Η f' συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$
- $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{e}-2<0$ και $f'(1)=e-1>0$ άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f'(1)<0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\alpha)=0$ δηλαδή στο σημείο $M\left(\alpha,f(\alpha)\right)$ η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Όμως $f''(x)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}>0$ για κάθε $x\in A$ οπότε η $f'(x)$ γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$ άρα η οριζόντια εφαπτομένη είναι μοναδική.

Δ2. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\alpha$ και εκατέρωθεν αυτής η f' αλλάζει πρόσημο .

Σημείωση το $x=\alpha$ είναι το κρίσιμο σημείο της f αφού εκεί η παράγωγός της μηδενίζεται.

Η g παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}+\alpha e^x-1$

$g'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha}+\alpha e^\alpha-1$, όμως από το Δ1. $f'(\alpha)=0\Leftrightarrow e^\alpha-\frac{1}{\alpha}=0\Leftrightarrow \boxed{e^\alpha=\frac{1}{\alpha}}$

Οπότε $g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}-1=0$

$g''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}+\alpha e^x>0$ για κάθε $x\in A$ αφού και $\alpha>0$ άρα η g' γνησίως αύξουσα

$$g'(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>g'(\alpha)\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}x>\alpha$$

και

$$g'(x)<0\Leftrightarrow g'(x)<g'(\alpha)\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}0<x<\alpha$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ ενώ στη θέση $x=\alpha$ έχει ελάχιστο το $\boxed{g(\alpha)=e^\alpha-\ln\alpha+\alpha e^\alpha-1}$

Δ3.

- Για το όριο του παρονομαστή έχουμε :

$$\lim_{x\to\alpha}g(x)=g(\alpha)=e^\alpha-\ln\alpha+\alpha e^\alpha-\alpha=e^\alpha+\alpha+\alpha\frac{1}{\alpha}-1=e^\alpha+1$$

Αφού : $\boxed{e^\alpha=\frac{1}{\alpha}}\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-\ln\alpha}$ άρα $\lim_{x\to\alpha}\left[g(x)-e^\alpha-1\right]=0$

Στην θέση $x=\alpha$ η g έχει ελάχιστο άρα για τιμές του x κοντά στο α ισχύει

$$g(x)>g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)-e^\alpha-1>0$$

Άρα $\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{g(x)-e^\alpha-1}=+\infty$

- Για το όριο του αριθμητή έχουμε

$$\lim_{x\to\alpha}\left[g\left(2\alpha+f(x)\right)-g\left(1+f(\alpha)\right)\right]=g\left(2\alpha+f(\alpha)\right)-g\left(1+f(\alpha)\right)>0$$

Διότι:

Ισχύει $2\alpha+f(\alpha)>1+f(\alpha)$,οι αριθμοί $2\alpha+f(\alpha),2\alpha+1$ είναι μεγαλύτερη του α , δηλαδή βρίσκονται σε διάστημα όπου η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$g\left(2\alpha+f(\alpha)\right)>g\left(1+f(\alpha)\right)\Leftrightarrow g\left(2\alpha+f(\alpha)\right)-g\left(1+f(\alpha)\right)>0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g\left(2\alpha+f(x)\right)-g\left(1+f(\alpha)\right)}{g(x)-e^{\alpha}-1}=+\infty$

Δ4. (i) Έστω $\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx=\kappa,\kappa\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$e^{x}\geq\kappa x+1\Leftrightarrow e^{x}-\kappa x-1\geq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x}-\kappa x-1, x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή στο $x=0$ έχει ελάχιστο ,είναι παραγωγίσιμη σ αυτό άρα από θεώρημα Fermat $\varphi'(0)=0$,

Έχουμε $\varphi'(x)=e^{x}-\kappa$ και $\varphi'(0)=0\Leftrightarrow e^{0}-\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=1$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx=1$

(ii) Για την συνάρτηση $h(x)=g\left(x^{2}\right)-f\left(x^{2}\right)$ αντικαθιστώντας έχουμε

$$h(x)=\alpha e^{x^{2}}-x^{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\left(\alpha e^{x^{2}}-x^{2}\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\cdot h(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)F'(x)dx$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\left[(x-\alpha)\cdot F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx=(\beta-\alpha)F(\beta)-1$$