Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

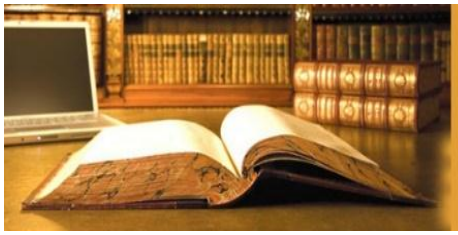
Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

11ο Διαγώνισμα

23 - 5 - 2020

Θέμα Α

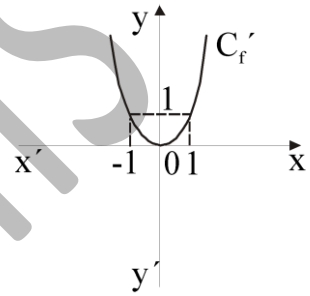
Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x \ln\alpha$.

μονάδες 4

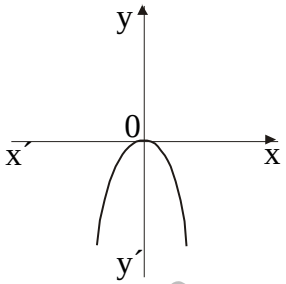
Α2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

μονάδες 4

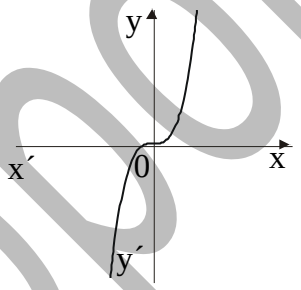
Α3. Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



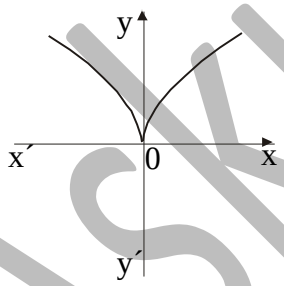
Α.



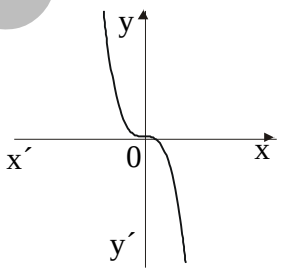
Β.



Γ.



Δ.



μονάδες 3

Α4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f.

Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός:

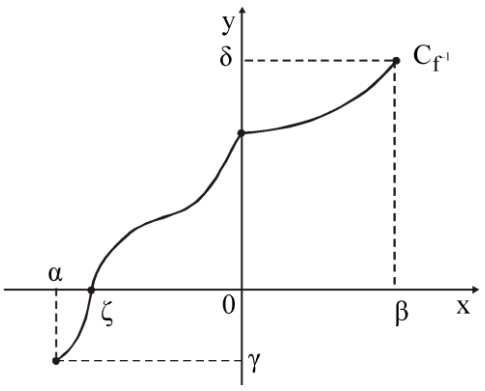
Α. πεδίο ορισμού της f είναι το [γ, δ]

Β. σύνολο τιμών της f είναι το [α, β]

Γ. $f^{-1}(\zeta)=0$

Δ. $f(0)=\zeta$

Ε. Η f έχει ελάχιστο το α για x = 0



μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή

Askisopolis

Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x)<0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

β) Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))=\gamma$.

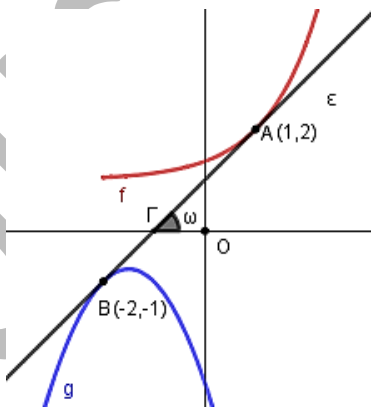
δ) Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

μονάδες 10

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων f, g και η ευθεία ε που εφάπτεται στις C_f, C_g.



Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ε και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f'(1)=g'(-2)$, $A\hat{\Gamma}O=45°$.

μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2g(x)+4}{x+2}=8$

μονάδες 4

Β3. Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)g(h-2)+f(1+h)-2g(h-2)-2}{h^2}=1$$

μονάδες 5

Β4. Έστω $f(x)=e^{x-1}+1$ και $g(x)=-x^2-3x-3$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x>-1$.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του ακέραιου $c>15$ που πρέπει να προστεθεί στην g, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f, g να τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(1,2)$.

μονάδες 5+5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν :

- $A_f=[2,8]$
- $A_g=[1,5]$
- $g(3)=2$

Γ1. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\alpha(x)=f(x)+g(x)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες στο $[2,5]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση α είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,5]$.

μονάδες 1+4

Γ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $g^2(x)=f^2(x)+4, x\in[3,5]$, να δείξετε ότι :

α) η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$.

β) η συνάρτηση $\beta(x)=\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,5]$.

μονάδες 3+4

Askisopolis

Γ3. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(3,4)$ και η συνάρτηση

$\gamma(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_\gamma=(2,3)\cup(3,4)\cup(4,5]$.

Να δείξετε ότι :

α) $f(2)=f(3)=f(4)=0$.

β) η f' έχει οριζόντια εφαπτομένη

γ) η εξίσωση $\dfrac{f(x)+1}{x-4}+\dfrac{g(x)}{x-3}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(3,4)$.

μονάδες 4+5+4

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to(0,+\infty)$ με $f(1)=2$ για την οποία ισχύει ότι

$xf'(x)-2f(x)=-\dfrac{4}{x^2}$ για κάθε $x\neq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0$.

μονάδες 6

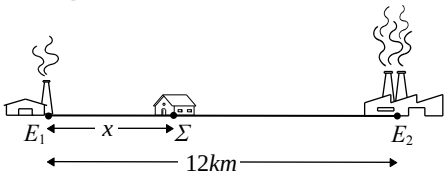
Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\eta\mu^4 x+1)-\sigma\upsilon\nu^2 x+1=f(x^4+1)+x^2$ είναι αδύνατη για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

μονάδες 7

Δ4. Ένα εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km. Το εργοστάσιο E_1 εκπέμπει καπνό παροχής P και το E_2 παροχής 8P. Η πυκνότητα του καπνού σε μία απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης d εις την δύναμη $\lambda>1$.



α) Να δείξετε ότι η πυκνότητα του καπνού στην θέση Σ του διπλανού σχήματος δίνεται από την συνάρτηση $\rho(x)=kP\left(\dfrac{1}{x^\lambda}+\dfrac{8}{(12-x)^\lambda}\right)$, $x\in(0,12)$, με k μία σταθερά διάφορη του μηδενός.

β) Αν τη λιγότερη δυνατή ρύπανση την έχουμε όταν το σπίτι θα απέχει απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1 τότε να δείξετε ότι $\rho(x)=kP\left(f(x)+8f(12-x)-x^2-8(12-x)^2\right), x\in(0,12)$.

μονάδες 3+5

Καλή τύχη!

Askisopolis

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Α2. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή. } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Α3. Β

Α4. Ε

Α5. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(-2,-1)$, οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = \frac{-1-2}{-2-1} = 1$ και εξίσωση: $y - 2 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(1) = \lambda = 1$. Επειδή η ε εφάπτεται της C_g στο Β, είναι $g'(-2) = \lambda = 1$. Είναι $\varepsilon\varphi A\hat{\Gamma}O = \lambda = 1 \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}O = 45°$

Β2. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 g(x) + 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 g(x) + x^2 - x^2 + 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2\left(g(x) + 1\right) - \left(x^2 - 4\right)}{x + 2} =$

$$\lim_{x \to -2}\left[x^2 \frac{\left(g(x) - g(-2)\right)}{x + 2} - \frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}}\right] = 4 \cdot g'(-2) - (-4) = 4 \cdot 1 + 4 = 8$$

Β3. $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)g(h-2) + f(1+h) - 2g(h-2) - 2}{h^2} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)\left(g(h-2) + 1\right) - 2\left(g(h-2) + 1\right)}{h^2} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(g(h-2) + 1\right)\left(f(1+h) - 2\right)}{h^2} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{g(h-2) + 1}{h} \cdot \frac{f(1+h) - 2}{h}\right) = g'(-2) \cdot f'(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Β4. α) Είναι $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow e^{x-1} > -2x - 3 \Leftrightarrow e^{x-1} + 2x + 3 > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x-1} + 2x + 3,\ x \geq -1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $h'(x) = e^{x-1} + 2$

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Askisopolis

Για κάθε $x>-1$ είναι $h(x)>h(-1)=e^{-2}+1>0$

β) Αναζητούμε ακέραιο $c>14$ για τον οποίο η εξίσωση $f(x)=g(x)+c\Leftrightarrow f(x)-g(x)-c=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Έστω $\varphi(x)=f(x)-g(x)-c=e^{x-1}+x^2+3x+4-c,\ x\in[1,2]$.

Είναι $\varphi'(x)=e^{x-1}+2x+3>0$ για κάθε $x\in(1,2)$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

Είναι $\varphi(1)=1+1+3+4-c=9-c<0$ και $\varphi(2)=e+4+6+4-c=e+14-c$.

Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,2)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$\varphi((1,2))=\left(\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x),\lim\limits_{x\to2^-}\varphi(x)\right)=(9-c,e+14-c)$.

Για να έχει η φ ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$, αρκεί το μηδέν να περιέχεται στο σύνολο τιμών της.

Επειδή $\varphi(1)<0$, πρέπει $\varphi(2)>0\Leftrightarrow e+14-c>0\Leftrightarrow c<14+e$. Άρα $15<c<14+e$.

Επειδή $e\simeq2,718$ και ο c είναι ακέραιος, είναι $c=16$.

Θέμα Γ

Γ1.α) $A_\alpha=A_f\cap A_g=[2,5]$.

β) Έστω $x_1,x_2\in[2,5]$ με $x_1<x_2$. Οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες οπότε $f(x_1)<f(x_2)$ (1) και $g(x_1)<g(x_2)$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow\alpha(x_1)<\alpha(x_2)$ άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,5]$.

Γ2.α) Από τη σχέση $g^2(x)=f^2(x)+4$ έχουμε $g^2(x)>0\Leftrightarrow g(x)\neq0$ αφού $f^2(x)+4>0$.

Η g είναι συνεχής στο $[3,5]$, $g(x)\neq0$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Όμως $g(3)=2$ άρα $g(x)>0$ στο $[3,5]$.

Από τη σχέση $g^2(x)=f^2(x)+4$ έχουμε :

$g^2(3)=f^2(3)+4\Leftrightarrow4=f^2(3)+4\Leftrightarrow f^2(3)=0\Leftrightarrow f(3)=0$.

Για $3\le x\le5\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(3)\le f(x)\le f(5)\Rightarrow f(x)\ge0$.

Έστω $x_1,x_2\in[3,5]$ με

$x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f^2(x_1)<f^2(x_2)\Leftrightarrow f^2(x_1)+4<f^2(x_2)+4\Leftrightarrow$.

$g(x_1)<g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα..

β) Έστω $x_1,x_2\in(3,5]$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}$(1) .

Επίσης $x_1<x_2\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{1}{g(x_1)}>\dfrac{1}{g(x_2)}$(2)

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

Askisopolis

$$\frac{1}{f(x_1)\cdot g(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)\cdot g(x_2)} \Leftrightarrow \beta(x_1) > \beta(x_2)$$

άρα η β είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,5]$.

Γ3.α) Η συνάρτηση γ έχει πεδίο ορισμού το

$$A_\gamma = A_f \cap A_g - \{x \in A_g / f(x) = 0\} = [2,5] - \{x \in A_g / f(x) = 0\}.$$

Για να είναι $A_\gamma = (2,3) \cup (3,4) \cup (4,5]$ πρέπει οι 2, 3,4 να είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ οπότε $f(2) = f(3) = f(4) = 0$.

β) Η f είναι συνεχής στα $[2,3],[3,4]$,παραγωγίσιμη στα $(2,3),(3,4)$, $f(2) = f(3) = 0$, $f(3) = f(4) = 0$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (2,3), x_2 \in (3,4)$ τέτοιοι ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$,άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άρα η f' έχει οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Έχουμε $\frac{f(x)+1}{x-4} + \frac{g(x)}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (f(x)+1)\cdot(x-3) + (x-4)\cdot g(x) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (f(x)+1)\cdot(x-3) + (x-4)\cdot g(x)$.

Η h είναι συνεχής στο $[3,4]$ γιατί έχει τύπο που αποτελείται από πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(3) = -g(3) < 0, h(4) = f(4)+1 = 1 > 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει $\xi \in (3,4)$ τέτοιος ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow (f(\xi)+1)\cdot(\xi-3) + (\xi-4)\cdot g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)+1}{\xi-4} + \frac{g(\xi)}{\xi-3} = 0.$$

Θέμα Δ

Δ1. $xf'(x) - 2f(x) = -\frac{4}{x^2} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 f'(x) - 2xf(x) = -\frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = -\frac{4}{x^5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x^4}\right)' \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{x^4} + c_1, x > 0 \\ \frac{1}{x^4} + c_2, x < 0 \end{cases} \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + c_1 x^2, x > 0 \\ \frac{1}{x^2} + c_2 x^2, x < 0 \end{cases}$$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(1) = 2$. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-1) = 2$.

Άρα για $x = -1 : c_2 = 1$ και για $x = 1 : c_1 = 1$ άρα $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3}, x \neq 0$.

Το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία της f δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Askisopolis

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-		-	0	+
x^2+1	+		+		+		+
x^3	-		-	0	+		+
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

Η f είναι συνεχής στα $-1,1$ άρα παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε αυτά τα σημεία.

Ισχύει $f(-1)=f(1)=2$ οπότε στα -1,2 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 2.

Δ3. $f\left(\eta\mu^4x+1\right)-\sigma\upsilon\nu^2x+1=f\left(x^4+1\right)+x^2$ με $x\geq 1$.

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|=|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Για $x\in[1,+\infty)$: $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow\eta\mu^4x<x^4\Leftrightarrow\eta\mu^4x+1<x^4+1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(\eta\mu^4x+1\right)<f\left(x^4+1\right)(1)$

$|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow\eta\mu^2x<x^2\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2x<x^2\ \ (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) έχουμε:

$f\left(\eta\mu^4x+1\right)-\sigma\upsilon\nu^2x+1<f\left(x^4+1\right)+x^2$ για κάθε $x\geq 1$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη,

Δ4. α) Επειδή η πυκνότητα του καπνού σε μία απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης d εις την δύναμη $\lambda>1$, έχουμε:

Η πυκνότητα του καπνού στη θέση Σ που οφείλεται στο εργοστάσιο E_1 είναι $\frac{kP}{x^\lambda}$ και η πυκνότητα του καπνού στη θέση Σ που οφείλεται στο εργοστάσιο E_2 είναι $\frac{k\cdot 8P}{(12-x)^\lambda}$, όπου k σταθερά

Η συνολική πυκνότητα του καπνού στη θέση Σ δίνεται από την συνάρτηση:

$$\rho(x)=k\left(\frac{P}{x^\lambda}+\frac{8P}{(12-x)^\lambda}\right)=kP\left(\frac{1}{x^\lambda}+\frac{8}{(12-x)^\lambda}\right),\ x\in(0,12)$$

β) Η ρ είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με παράγωγο:

$$\rho'(x)=kP\left(-\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}}+\frac{8\lambda(12-x)^{\lambda-1}}{(12-x)^{2\lambda}}\right)=kP\left(-\lambda x^{-\lambda-1}+8\lambda(12-x)^{-\lambda-1}\right),\ x\in(0,12)$$

Τη λιγότερη δυνατή ρύπανση την έχουμε όταν το σπίτι θα απέχει απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1, δηλαδή για $x=4$ η συνάρτηση ρ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Το $x=4$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της άρα από θεώρημα Fermat έχουμε:

$\rho'(4)=0\Leftrightarrow kP\left(-\lambda 4^{-\lambda-1}+8\lambda\cdot 8^{-\lambda-1}\right)=0\Leftrightarrow-\lambda 4^{-\lambda-1}+8\lambda\cdot 8^{-\lambda-1}=0\Leftrightarrow$

$\lambda\left(8\cdot 8^{-\lambda-1}-4^{-\lambda-1}\right)=0\Leftrightarrow\lambda\left(8^{-\lambda}-4^{-\lambda-1}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ 8^{-\lambda}-4^{-\lambda-1}=0\end{cases}\overset{\lambda>1}{\Leftrightarrow}8^{-\lambda}-4^{-\lambda-1}=0\Leftrightarrow$

$8^{-\lambda}=4^{-\lambda-1}\Leftrightarrow 2^{-3\lambda}=2^{-2\lambda-2}\Leftrightarrow-3\lambda=-2\lambda-2\Leftrightarrow\lambda=2$

Άρα έχουμε $\rho(x)=kP\left(\frac{1}{x^2}+\frac{8}{(12-x)^2}\right)=kP\left(f(x)+8f(12-x)-x^2-8(12-x)^2\right),x\in(0,12)$

Askisopolis