# Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026



**Αντώνης Βαλέργας** **Γαβριήλ Ελευθερίου**

**Αποστόλης Κακαβάς** **Νίκος Κουμάντος**

**Στέλιος Μιχαήλογλου** **Άγγελος Μπλιάς**

**Θανάσης Νικολόπουλος** **Βαγγέλης Ραμαντάνης**

**Δημήτρης Πατσιμάς** **Νίκος Σαμπάνης**

**Βαγγέλης Τόλης** **Νίκος Τούντας** **Ισαάκ Χιονίδης**

**6ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου**
**από την ομάδα του Ασκησόπολις**
**Διάρκεια: 3 ώρες**
**Ύλη: 2ο Γενικό Επαναληπτικό**

# Θέμα Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

7 μονάδες

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

4 μονάδες

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 μονάδες

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] , τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3] .

**β)** Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$.

**γ)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**δ)** Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $x_0$ ,τότε η f΄ είναι συνεχής στο $x_0$ .

**ε)** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

10 μονάδες

# Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\ln x) = \dfrac{x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

4 μονάδες

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

6 μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $f^{-1}(x) = \ln x - \ln(1-x),\ x \in (0,1)$.

**Β3.** Να μελετήσετε την $h(x) = f^{-1}(x)$ ως προς τη μονοτονία και τη κυρτότητα.

5 μονάδες

**Β4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

3 + 3 = 6 μονάδες

**Β5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)=f(\ln x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

4 μονάδες

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+e^{\alpha}+3, & x\le 0 \\ x^3-6x^2+\alpha+4, & x>0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

4 μονάδες

**Γ2.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όπου αυτή ορίζεται.

6 μονάδες

**Γ3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

7 μονάδες

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι $f(x^2+2)+f(x^2+6)>2f(x^2+4)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8 μονάδες

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=xe^x+2\int_0^1 f(x)dx-2$, $x\in\mathbb{R}$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$

5 μονάδες

**Δ2. α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β)** Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\text{συν}\kappa$, $\kappa\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4 + 4 = 8 μονάδες

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>-1$, με $\alpha<\beta$, υπάρχει μοναδικός $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\frac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}$.

5 μονάδες

**Δ4.α)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

**β)** Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\cdot e^{x+2}+e^2|x+2|\le -1$.

3 + 4 = 7 μονάδες

**Κάθε επιτυχία!**