ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2\Leftrightarrow(z_1\cdot z_2)\left(\overline{z_1\cdot z_2}\right)=z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2\Leftrightarrow$

$z_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2$ ισχύει

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Β. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $|z|=\left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right|=\dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}}=1$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

β. Για $\alpha=0$, είναι $z_1=\dfrac{2+0\cdot i}{0+2i}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$ και για $\alpha=2$ είναι $z_2=\dfrac{2+2i}{2+2i}=1$.

i. Η απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 είναι $|z_1-z_2|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

ii. Είναι $(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=\left[(-i)^2\right]^{\nu}=(-1)^{\nu}=(-z_2)^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-3$.

$f'(x)\geq0\Leftrightarrow3x^2-3\geq0\Leftrightarrow x^2\geq1\Leftrightarrow|x|\geq1\Leftrightarrow x\leq-1$ ή $x\geq1$

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,-1]$,

για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[-1,1]$ και

για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f′	+	–	+	
f	↗	↘	↗	

askisopolis

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ το $f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta=2(1-\eta\mu^2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=-2-2\eta\mu^2\theta=-2(1+\eta\mu^2\theta)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=6x$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$, ενώ για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))\equiv(0,-2\eta\mu^2\theta)$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(-1)\right]=(-\infty,2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Επειδή $2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ για κάθε $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, το μηδέν ανήκει στο $f(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_2=[-1,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα: $f(\Delta_2)=[f(1),f(-1)]=[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Επειδή $0\in f(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_3=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα: $f(\Delta_3)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty)$.

Επειδή $0\in f(\Delta_3)$, υπάρχει $x_3\in\Delta_3$ τέτοιο, ώστε $f(x_3)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3, το x_3 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρείς πραγματικές ρίζες.

γ) Είναι $A(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1,-2-2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0,-2\eta\mu^2\theta)$.

Επειδή $\begin{cases}2\sigma\upsilon\nu^2\theta=-2(-1)-2\eta\mu^2\theta\\-2-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta\\-2\eta\mu^2\theta=-2\cdot0-2\eta\mu^2\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\eta\mu^2\theta=2\\-2-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta\\-2\eta\mu^2\theta=-2\eta\mu^2\theta\end{cases}$, οι συντεταγμένες των Α,Β,Γ επαληθεύουν την εξίσωση $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$, άρα τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

δ. Εστω $g(x)=f(x)-(-2x-2\eta\mu^2\theta)\Leftrightarrow$.

$g(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	−	+	−	+	

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega)=\int_{-1}^{1}|g(x)|dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx-\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx\Leftrightarrow$

askisopolis

$$E(\Omega)=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[0,1]$, η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x)=\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'=f(x)g(x)$$

Για κάθε $0<x<1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>0 \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} g(x)f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F\nearrow[0,1]$.

Για κάθε $0<x\le 1$ είναι $F(x)>F(0)=0$

β. $f(x)G(x)>F(x)\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)dt>\int_0^x f(t)g(t)dt\Leftrightarrow \int_0^x f(x)g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt>0\Leftrightarrow$

$\int_0^x g(t)(f(x)-f(t))dt>0$.

Είναι $g(t)>0$ για κάθε $t\in[0,x]$, $x\in(0,1]$.

Για κάθε $0\le t\le x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(t)\le f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(t)\ge 0\Leftrightarrow g(t)(f(x)-f(t))\ge 0$.

Επειδή η ισότητα στη προηγούμενη σχέση ισχύει μόνο για $t=x$, είναι

$\int_0^x g(t)(f(x)-f(t))dt>0$

γ. Εστω $h(x)=\frac{F(x)}{G(x)}, x\in(0,1]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ με

$$h'(x)=\frac{F'(x)G(x)-G'(x)F(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-g(x)F(x)}{G^2(x)}=\frac{g(x)(f(x)G(x)-F(x))}{G^2(x)}$$

Επειδή $g(x)>0$, $G^2(x)>0$ και $f(x)G(x)-F(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$, είναι

$h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(0,1]$

Για κάθε $0<x\le 1$ είναι $h(x)\le h(1)\Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{5}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}=0\cdot1=0$, άρα

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right)=0\cdot f(0)=0$$

askisopolis