ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2021

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μέγιστου

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle (μονάδες 2) και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία το θεωρήματος (μονάδες 2)

Μονάδες 4

Α4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και f (α) μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\alpha) = 0$»

α) Να απαντήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής

Μονάδα1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας με ένα παράδειγμα

Μονάδες 3

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

β) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ) Αν η f δεν είναι σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, x \neq 1$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Έστω $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 1$ σημείο της C_f

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τα σημεία Α και Β που τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

Β3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων είναι $E(\xi) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2\xi-1}{\xi-1}\right)^2, \xi > 1$

Β4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, συνεχώς ελαττώνεται αλλά δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από 2.

Β5. Έστω σημείο Σ(1, 0) να βρείτε το σημείο $N(x, f(x))$ με $x < 1$ για το οποίο η απόσταση (ΣΝ) να είναι η ελάχιστη. Ποια η ελάχιστη απόσταση;

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$, $0 < \alpha \neq 1$

Γ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 4

Για $\alpha = e$

Γ2. Να αποδείξετε ότι

i. η f είναι κυρτή

Μονάδες 3

ii. $e^x > \left(e - \dfrac{1}{2}\right) \cdot x + \ln\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x > -1$ με $x \neq 1$

Μονάδες 3

iii. στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Μονάδες 2

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x + 1) - f(x) > f'(x)$ για κάθε $x > -1$

Μονάδες 5

Γ4. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Γ5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς γ και β για τους οποίους ισχύει

$$f(\gamma^2 - 2\gamma + 1) + f(1 - \eta\mu\beta) = 2$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f

Μονάδες 3

Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 2) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$, $x > 0$

Δ3. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$ (μονάδες 2) και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η h είναι

i. περιττή

Μονάδες 2

ii. αντιστρέψιμη

Μονάδες 1

iii. και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 3

Αν $h^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$,

Δ5. σημείο $M(\alpha, h^{-1}(\alpha))$ κινείται στη γραφική παράσταση της $C_{h^{-1}}$ και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 1cm/min, να βρείτε σε ποια θέση ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι ίσος με 1cm/min.

Μονάδες 5

Οι απαντήσεις στο διαγώνισμα Μαρτίου

Επιμέλεια ενδεικτικών λύσεων

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

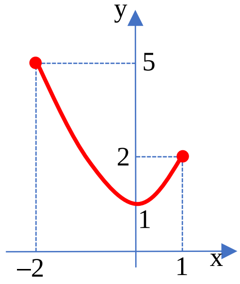
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 140

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. α) Ψ

β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-2, 1]$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα



Παρατηρούμε ότι στο $x = -2$ η f παρουσιάζει μέγιστο το

$f(-2) = 5$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 2x$ για την

οποία ισχύει $f'(-2) = -4$ που δεν είναι μηδέν.

Α5. α) Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Επιπλέον για κάθε $x \neq 1$ έχουμε:

$f''(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4}$ και επειδή $(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$ το πρόσημο της f'' είναι το πρόσημο του $x - 1$ που το σημειώνουμε στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	–	‖	+
f(x)		‖	

Επομένως είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 1$ είναι:

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, όπου $f(\xi) = \dfrac{1}{\xi-1}$ και $f'(\xi) = -\dfrac{1}{(\xi-1)^2}$

Επομένως είναι $y - \dfrac{1}{\xi-1} = -\dfrac{1}{(\xi-1)^2}\cdot(x-\xi)$

• Για y = 0 έχουμε:

$$0 - \frac{1}{\xi-1} = -\frac{1}{(\xi-1)^2}\cdot(x-\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{\xi-1} = \frac{1}{(\xi-1)^2}\cdot(x-\xi) \Leftrightarrow \xi - 1 = x - \xi \Leftrightarrow x = 2\xi - 1$$

Άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(2\xi - 1, 0)$

• Για x = 0 έχουμε

$$y - \frac{1}{\xi-1} = -\frac{1}{(\xi-1)^2}\cdot(0-\xi) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\xi-1} = \frac{\xi}{(\xi-1)^2} \Leftrightarrow y = \frac{\xi}{(\xi-1)^2} + \frac{1}{\xi-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2\xi-1}{(\xi-1)^2}$$

Άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B\left(0, \dfrac{2\xi-1}{(\xi-1)^2}\right)$

B3. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E = \dfrac{1}{2}(OA)\cdot(OB)$ και επειδή είναι

$2\xi - 1 > 0$, $\dfrac{2\xi-1}{(\xi-1)^2}$ για κάθε $\xi > 1$ έχουμε:

$$E(\xi) = \frac{1}{2}\cdot(2\xi-1)\cdot\frac{2\xi-1}{(\xi-1)^2} \Leftrightarrow E(\xi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\xi-1)^2}{(\xi-1)^2} \Leftrightarrow E(\xi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\xi-1}{\xi-1}\right)^2$$

B4. Για να αποδείξουμε ότι το εμβαδόν συνεχώς ελαττώνεται αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $E(\xi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Έχουμε:

$$E'(\xi) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{2\xi-1}{\xi-1}\right)\cdot\left(\frac{2\xi-1}{\xi-1}\right)' = \frac{2\xi-1}{\xi-1}\cdot\frac{-1}{(\xi-1)^2} \Leftrightarrow E'(\xi) = -\frac{2\xi-1}{(\xi-1)^3}$$

Όμως για κάθε $\xi > 1$ ισχύουν $2\xi - 1 > 0$ και $(\xi - 1)^3 > 0$, άρα $E'(\xi) < 0$ για κάθε $\xi > 1$.

Επομένως η συνάρτηση $E(\xi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

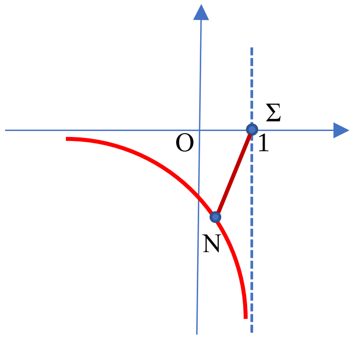
• Θα βρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} E(\xi)$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} E(\xi) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\xi-1}{\xi-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\xi-1}{\xi-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\xi}{\xi}\right)^2 = 2$$

Επομένως το εμβαδόν συνεχώς ελαττώνεται αλλά δεν γίνεται να πάρει τιμές που να είναι μικρότερες του 2.

Β5. Για κάθε $x < 1$, η απόσταση ΣΝ είναι:



$$(\Sigma N) = \sqrt{(x_N - x_\Sigma)^2 + (y_N - y_\Sigma)^2}$$

$$(\Sigma N) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{x-1} - 0\right)^2}$$

$$(\Sigma N) = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{1}{(x-1)^2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-1)^2 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x < 1$

Είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = 2(x-1) - \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = 2(x-1) - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{2(x-1)^4 - 2}{(x-1)^3} = \frac{2[(x-1)^4 - 1]}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot[(x-1)^2 - 1]\cdot[(x-1)^2 + 1]}{(x-1)^3} = \frac{2\cdot x\cdot(x-2)\cdot[(x-1)^2 + 1]}{(x-1)^3}$$

Επειδή $(x - 1)^2 + 1 > 0$ για κάθε $x < 1$ έχουμε:

x	−∞	0	1
2x	−	+	
x − 2	−	−	
$(x-1)^3$	−	−	
$g'(x)$	−	+	
g(x)	↘	ΟΕ $g(0) = 2$	↗

Σχόλιο:
Το ακρότατο μπορούμε να το προσδιορίσουμε και με τη βοήθεια της βασικής ανισότητας

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2,\ \alpha > 0$$

που η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = 1$

Επομένως στο $x = 0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο που είναι ίσο με $g(0) = 2$, άρα το σημείο Ν θα πρέπει να βρίσκεται στη θέση $N(0, 2)$.

Η ελάχιστη απόσταση ΣΝ είναι ίση με $\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Για κάθε $x > -1$ ισχύει $f(x) \geq 1$ και $f(0) = 1$, οπότε ισχύει:

$$f(x) \geq f(0) = 1 \text{ για κάθε } x > -1$$

τότε:

• το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό του διαστήματος $(-1, +\infty)$

• στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο

• είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $f'(0) = 0$

Έχουμε:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \cdot \ln\alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$

Γ2. i. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-1, +\infty)$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$$

όπου $f(1) = e - \ln 2$ και $f'(1) = e - \dfrac{1}{2}$, οπότε

$$y - (e - \ln 2) = \left(e - \frac{1}{2}\right)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow y - e + \ln 2 = \left(e - \frac{1}{2}\right)\cdot x - e + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \left(e - \frac{1}{2}\right)\cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2}$$, η εξίσωση της εφαπτομένης.

Επειδή η f είναι κυρτή η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για κάθε $x > -1$ και $x \neq 1$ ισχύει

$$f(x) > \left(e - \frac{1}{2}\right)\cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2}$$

Έχουμε:

$$f(x) > \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - \ln(x+1) > \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x > \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x + \ln(x+1) - \ln 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x > \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x + \ln\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}$$

iii. Γνωρίζουμε ότι:

- $f(x) > \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 1$
- και επιπλέον $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \ln 2 + \frac{1}{2} = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Γ3. Για κάθε $x > -1$, f είναι:

- συνεχής στο $[x, x + 1]$
- παραγωγίσιμη στο $(x, x + 1)$

Άρα σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x + 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x + 1) - f(x)$$

Είναι $x < \xi < x + 1$ και η f κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ οπότε

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(x + 1)$$

Από την παραπάνω έχουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < f(x + 1) - f(x)$$

Γ4. Έχουμε $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, $x > -1$ και $f'(0) = 0$ προφανής ρίζα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα, επομένως

- Για $x > 0$ ισχύει $f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$
- Για $-1 < x < 0$, ισχύει $f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Τα παραπάνω τα απεικονίζουμε στον πίνακα:

x	$-\infty$ $\quad$ -1		0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$	ΤΕ $f(0) = 1$	$\nearrow$

Επομένως

• $f'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$, η f είναι συνεχής στο $(-1, 0]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$

• $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Άρα στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Γ5. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ και επιπλέον $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma^2 - 2\gamma + 1 \neq 0$ ή $1 - \eta\mu\beta \neq 0$ τότε:

$$f(\gamma^2 - 2\gamma + 1) > 1 \text{ ή } f(1 - \eta\mu\beta) > 1$$

επομένως

$$f(\gamma^2 - 2\gamma + 1) + f(1 - \eta\mu\beta) > 2 \text{ άτοπο}$$

Άρα

$$\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 1 - \eta\mu\beta = 0$$

Έχουμε:

• $\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1$

• $1 - \eta\mu\beta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Από την υπόθεση έχουμε $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Έστω $g(x) = \dfrac{f(x) - x - 1}{x^2}$ τότε:

$$f(x) = x^2 \cdot g(x) + x + 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 3} g(x) = \frac{1}{2}$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[x^2 \cdot g(x) + x + 1] = 1$

Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, άρα f(0) = 1

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x) = 2x\cdot f(x) + 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x\cdot f(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{x^2+1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ(x) = f(x) – x, $x\in\mathbb{R}$, τότε $|\varphi(x)| = \sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$, τότε από την παραπάνω ισότητα προκύπτει $|\varphi(x_0)| = \sqrt{x_0^2+1} \Leftrightarrow 0 = \sqrt{x_0^2+1} \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = 0$ που είναι αδύνατη, άρα $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για x = 0, $\varphi(0) = f(0) - 0 \Leftrightarrow \varphi(0) = 1 > 0$, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(x) > 0$

Άρα

$$|\varphi(x)| = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \varphi(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

Επομένως ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή είναι $\sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της f΄ είναι το πρόσημο της παράστασης $x + \sqrt{x^2+1}$

• Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2 < x^2 + 1$, οπότε:

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x > -\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A = $\mathbb{R}$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Άρα f(A) = (0, +∞)

Δ3. Έχουμε:

$A_{g\circ f} = \{x\in A_f$ και $f(x)\in A_g\} = \{x\in\mathbb{R}$ και $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}\}$

Επομένως $A_{g\circ f} = \mathbb{R} \neq \varnothing$ οπότε ορίζεται η $g\circ f$ με τύπο:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Τότε $h(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- Η h είναι παραγωγίσιμη με:

$h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Η h΄ είναι παραγωγίσιμη με $h''(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το

πρόσημο της είναι το πρόσημο του –x και το σημειώνουμε στον παρακάτω πίνακα:

x	–∞ 0	+∞
–x	+	–
f΄΄(x)	+	–
f(x)		

Άρα η h είναι κυρτή στο διάστημα (–∞, 0], κοίλη στο [0, +∞) και έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = 0$ το Σ(0, h(0)) δηλαδή το Σ(0, 0)

Δ4. i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προφανώς και $-x\in\mathbb{R}$ με:

$$h(-x) = \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) =$$

$= \ln\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -h(x)$

Άρα η h είναι περιττή.

ii. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1 – 1, άρα είναι αντιστρέψιμη.

iii. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της h^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της h. Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_h = \mathbb{R}$, οπότε $h(A) = (\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x))$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(f(x))$

Θέτουμε u = f(x), τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(f(x)) = \lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(f(x))$

Θέτουμε u = f(x), τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της h, άρα και το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι $h(A) = \mathbb{R}$

Για τον τύπο της h^{-1} λύνουμε την εξίσωση h(x) = y ως προς x στο $\mathbb{R}$.

(*παρατηρούμε όμως είναι αρκετά δύσκολο να λύσουμε την εξίσωση αυτή με αλγεβρικό τρόπο, γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της περιττής συνάρτησης*)

Η h είναι περιττή, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει h(–x) = –y

Επομένως έχουμε τις εξισώσεις:

$$h(x) = y \quad \text{και} \quad h(-x) = -y$$

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = y \quad \text{και} \quad \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = -y$$

$$x+\sqrt{x^2+1} = e^y \quad \text{και} \quad -x+\sqrt{x^2+1} = e^{-y}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη οπότε προκύπτει:

$$2x = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Επομένως ορίζεται η h^{-1} με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Δ5. Έστω y η τεταγμένη του σημείου Μ, τότε $y = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$

Την τυχαία χρονική στιγμή t η τεταγμένη του Μ είναι:

$$y(t) = \frac{e^{\alpha(t)} - e^{-\alpha(t)}}{2},\ t \ge 0$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$$y'(t) = \left(\frac{e^{\alpha(t)} - e^{-\alpha(t)}}{2}\right)' \Leftrightarrow y'(t) = \frac{e^{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) - e^{-\alpha(t)} \cdot (-\alpha'(t))}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = \frac{e^{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) + e^{-\alpha(t)} \cdot \alpha'(t)}{2} \Leftrightarrow\ y'(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \left(e^{\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)}\right)}{2} \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t) = 1$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι $y'(t_0) = 1$, οπότε από την (1) έχουμε:

$$y'(t_0) = \frac{\alpha'(t_0) \cdot \left(e^{\alpha(t_0)} + e^{-\alpha(t_0)}\right)}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{1 \cdot \left(e^{\alpha(t_0)} + e^{-\alpha(t_0)}\right)}{2} \Leftrightarrow e^{\alpha(t_0)} + e^{-\alpha(t_0)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha(t_0)} + \frac{1}{e^{\alpha(t_0)}} = 2 \Leftrightarrow e^{2\alpha(t_0)} + 1 = 2 \cdot e^{\alpha(t_0)} \Leftrightarrow \left(e^{\alpha(t_0)} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha(t_0)} = 1 \Leftrightarrow \alpha(t_0) = 0$$

Επομένως το σημείο Μ εκείνη τη χρονική στιγμή θα βρίσκεται στη θέση με τετμημένη α = 0 και τεταγμένη y = 0, δηλαδή στην αρχή των αξόνων.