1_Διαγώνισμα_2021
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Να αποδείξετε ότι: Για συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

(Μονάδες 7)

A_2. Πότε μια συνάρτηση f είναι $1-1$;

(Μονάδες 4)

A_3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο x_0 , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας ,στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** ,αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)

A_4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0)\neq 0$,τότε κοντά στο x_0, οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.

(Μονάδες 2)

β. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha\,,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

(Μονάδες 2)

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2021$, τότε ισχύει: $\left(f(2021)\right)'=f'(2021)$

(Μονάδες 2)

δ. Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το $(-2,2)$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, τότε θα είναι $-2<\lim_{x\to+\infty} f(x)<2$.

(Μονάδες 2)

ε. Υπάρχει συνάρτηση f $1-1$ για την οποία ισχύει το θεώρημα του Rolle σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-x-2$ και $\varepsilon_2: y=x+2$.

Β₁. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Β₂. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(Μονάδες 6)

Να αποδείξετε ότι:

Β₃. Η $\varepsilon_1: y=-x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η $\varepsilon_2: y=x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(Μονάδες 6)

Β₄ Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+4x+5>(x+2)^2\geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(e^x+2)f'(x)=e^x(1-f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση $x^2-(3f(0)-4)x-2021^2=0$ έχει ρίζες αντίθετες, τότε:

Γ₁. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x+3}{e^x+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ₂. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\frac{4042}{3x}\right)$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης .

(Μονάδες 5)

Γ₅. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(e^x+2\right)\left(\theta+3\right)=\left(\theta+2\right)\left(e^x+3\right)$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\theta>0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)-f(2-x)\geq x-1\ \ (1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₁. Να δείξετε ότι $f(2)-f(0)=1$ και στην συνέχεια ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 6 (3+3))

Δ₂. Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση $f'(0)x^2-5x+\frac{1}{2}=0$ έχει δυο ρίζες που είναι αντίστροφοι αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi>0$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

(Μονάδες 5)

Δ₃. Να δείξετε ότι $f'(1)<\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

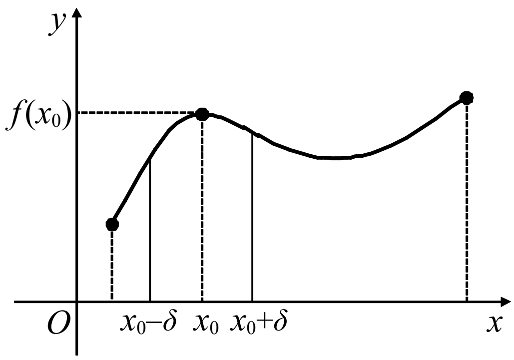
Δ₄. Να δείξετε ότι $f'(0)+f'(2)=1$.

(Μονάδες 8)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ’ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$



Και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0\ ,\ x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε

θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α₂. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 , όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1\ne x_2$, τότε $f(x_1)\ne f(x_2)$.

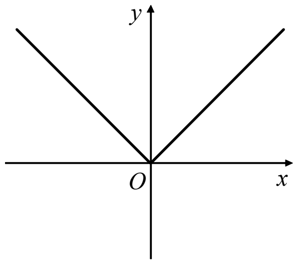
Α₃.

α. Α

β. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



Α₄. α ⟶ Σ, β ⟶ Σ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ, ε ⟶ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β₁. Επειδή $x^2+4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta<0$ το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+5}}\left(x^2+4x+5\right)'=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Άρα συμφώνα με τον διπλανό πίνακα η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty\,,\,-2]$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $[-2\,,+\infty)$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

Για $x=-2$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-2)=1$.

Β₂. Είναι:

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\dfrac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}}}{x^2+4x+5}$$

$$=\frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\left(x^2+4x+5\right)\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{1}{\left(x^2+4x+5\right)\sqrt{x^2+4x+5}}>0$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω δηλαδή είναι κυρτή.

B₃.

● Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-2)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x+2\right)=0 .$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}+2\right)$$

$$\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}+2\right)=\frac{4}{-2}+2=-2+2=0$$

● Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)=0 .$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}-2\right)$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}-2\right)=\frac{4}{2}-2=2-2=0$$

B₄. Είναι: $x^2+4x+5>x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ επομένως:

● κοντά στο $-\infty$ είναι

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}>\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=-x-2$, αφού $x<-2$.

Αυτό σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτη $\varepsilon_1 : y = -x - 2$

- κοντά στο $+\infty$ είναι

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} > \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$, αφού $x > -2$.

Αυτό σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτη $\varepsilon_2 : y = x + 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Έχουμε

$$\left(e^x+2\right)f'(x) = e^x\left(1-f(x)\right) \Leftrightarrow \left(e^x+2\right)f'(x) = e^x - e^x f(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x+2\right)f'(x) + e^x f(x) = e^x \Leftrightarrow \left(e^x+2\right)f'(x) + \left(e^x+2\right)' f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(e^x+2\right)f(x)\right]' = \left(e^x\right)' \Leftrightarrow \left(e^x+2\right)f(x) = e^x + c \quad (1).$$

Επειδή η εξίσωση $x^2 - \left(3f(0)-4\right)x - 2021^2 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες θα ισχύει $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ δηλαδή $3f(0) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{4}{3}$.

Η (1) για $x = 0$ γίνεται $\left(e^0+2\right)f(0) = e^0 + c \Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{4}{3} = 1 + c \Leftrightarrow c = 3$.

Άρα $\left(e^x+2\right)f(x) = e^x + 3 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^x+3}{e^x+2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ₂. $$f'(x) = \frac{\left(e^x+3\right)'\left(e^x+2\right) - \left(e^x+3\right)\left(e^x+2\right)'}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x+2\right) - e^x\left(e^x+3\right)}{\left(e^x+2\right)^2} =$$

$$\frac{e^x\left(e^x+2-e^x-3\right)}{\left(e^x+2\right)^2} = -\frac{e^x}{\left(e^x+2\right)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (-\infty, +\infty)$ το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^x+2} \overset{\frac{(+\infty)}{(+\infty)}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+3}{e^x+2} = \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2}.$$

Επομένως $f(A) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Γ₃. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{4042}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x\eta\mu\dfrac{4042}{3x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x\eta\mu\dfrac{4042}{3x}=$

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{4042}{3x}}{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4042}{3}\eta\mu\frac{4042}{3x}}{\frac{4042}{3x}}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to0}}{\overset{u=\frac{4042}{3x}}{=}}\frac{3}{2}\lim_{u\to0}\frac{\frac{4042}{3}\eta\mu u}{u}=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4042}{3}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=2021.1=2021$$

Γ₄. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$ συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Επομένως $D_{f^{-1}}=f(A)=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

Θέτουμε $y=f(x)$ οπότε έχουμε $y=\dfrac{e^x+3}{e^x+2}\Leftrightarrow y\left(e^x+2\right)=e^x+3\Leftrightarrow$

$$ye^x+2y=e^x+3\Leftrightarrow\left(y-1\right)e^x=3-2y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{3-2y}{y-1}\overset{1<y<\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow}\ln e^x=\ln\frac{3-2y}{y-1}\Leftrightarrow$$

$x=\ln\dfrac{3-2y}{y-1}$. Άρα ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{3-2x}{x-1}$ με $x\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

Γ₅. $\left(e^x+2\right)\left(\theta+3\right)=\left(\theta+2\right)\left(e^x+3\right)\Leftrightarrow\dfrac{e^x+3}{e^x+2}=\dfrac{\theta+3}{\theta+2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{e^x+3}{e^x+2}=\dfrac{e^{\ln\theta}+3}{e^{\ln\theta}+2}\Leftrightarrow f(x)=f(\ln\theta)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}x=\ln\theta$ μοναδική λύση για κάθε $\theta>0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Από την (1) για $x=0$ παίρνουμε $f(0)-f(2)\geq-1\Leftrightarrow f(2)-f(0)\leq1$ (2)

από την (1) για $x=2$ παίρνουμε $f(2)-f(0)\geq1$ (3)

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε $f(2)-f(0)=1$ (4)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}\overset{(4)}{=}\dfrac{1}{2}$.

Δ₂. Αφού η εξίσωση $f'(0)x^2-5x+\frac{1}{2}=0$ έχει δυο ρίζες x_1,x_2 που είναι αντίστροφοι αριθμοί θα ισχύει

$x_1x_2=1\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=1\Leftrightarrow\gamma=\alpha\Leftrightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,x_0\right]$ και $f'(0)=f'(x_0)=\frac{1}{2}$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,x_0\right)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Δ₃. $f(x)-f(2-x)\geq x-1\Leftrightarrow f(x)-f(2-x)-x+1\geq 0$

Έστω $g(x)=f(x)-f(2-x)-x+1\geq 0$

Είναι $g(1)=f(1)-f(1)-1+1=0$ δηλαδή ισχύει $g(x)\geq g(1)$ που σημαίνει ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από υπόθεση , η $2-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική επομένως και η $f(2-x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=f'(x)-f'(2-x)\left(2-x\right)'-1=f'(x)+f'(2-x)-1.$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι

$g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)+f'(1)-1=0\Leftrightarrow 2f'(1)=1\Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}<\frac{3}{4}$.

Δ₄. Η (1) λόγω της (4) γράφεται:

$f(x)-f(2-x)\geq x-f(2)+f(0)\Leftrightarrow f(x)-f(0)-\left[f(2-x)-f(2)\right]\geq x$

Για $x>0$

έχουμε $\frac{f(x)-f(0)}{x}-\left[\frac{f(2-x)-f(2)}{x}\right]\geq 1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2-x)-f(2)}{x}\overset{\substack{u=2-x\Leftrightarrow\\ x=2-u}}{\underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to 2^-}}{=}}\lim_{u\to 2^-}\frac{f(u)-f(2)}{2-u}=-\lim_{u\to 2^-}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}=-f'(2)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\left[\dfrac{f(2-x)-f(2)}{x}\right]\right)\geq 1 \Leftrightarrow f'(0)+f'(2)\geq 1$ (5)

Για $x<0$

έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\left[\dfrac{f(2-x)-f(2)}{x}\right]\leq 1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(2-x)-f(2)}{x}\ \overset{\substack{u=2-x\Leftrightarrow\\ x=2-u}}{\underset{\substack{x\to 0^-\\ u\to 2^+}}{=}}\ \lim_{u\to 2^+}\frac{f(u)-f(2)}{2-u}=-\lim_{u\to 2^+}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}=-f'(2)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\left[\dfrac{f(2-x)-f(2)}{x}\right]\right)\leq 1 \Leftrightarrow f'(0)+f'(2)\leq 1$ (6)

Από (5) και (6) προκύπτει $f'(0)+f'(2)=1$.