4_Διαγώνισμα_2020

(Σύμφωνα με την νέα ύλη)

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο *Δ* και $f'(x)=0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

(Μονάδες 6)

A_2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας ,στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** ,αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)

A_3. Σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα Ι. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ (οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$).

Πίνακας Ι

Στήλη Α

1. $(f(x) - g(x))' > 0$

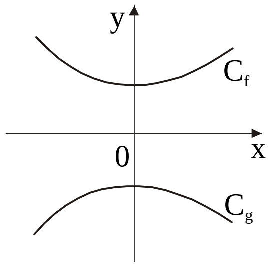
2. $(f(x) - g(x))' = 0$

3. $(f(x) - g(x))' < 0$

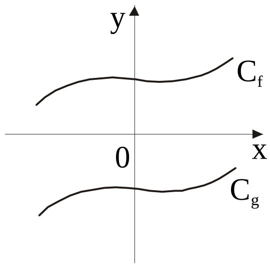
4. $(f(x) - g(x))' > 0$, για $x > 0$ και $(f(x) - g(x))' < 0$, για $x < 0$

Στήλη Β

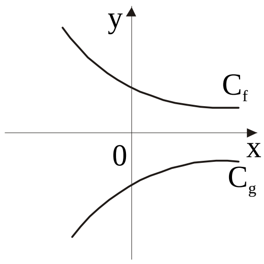
α.



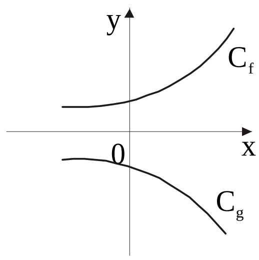
β.



γ.



δ.



Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

(Μονάδες 5)

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(Μονάδες 2)

β. Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται πάντα κοινή εφαπτομένη.

(Μονάδες 2)

γ. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

δ. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α,β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

(Μονάδες 2)

ε. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right]$, για την οποία ισχύουν:

- $x^2+f^2(x)=8$ για κάθε $x\in\left[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right]$.
- $f\left(\dfrac{1}{2020}\right)>0$

Β$_1$. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ **.**

(Μονάδες 3)

Β$_2$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{8-x^2}$ για κάθε $x\in\left[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right]$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση .

(Μονάδες 8)

B₃. Αν Α, Β δύο τυχαία σημεία της C_f να αποδείξετε ότι $(AB) \le 4\sqrt{2}$

(Μονάδες 4)

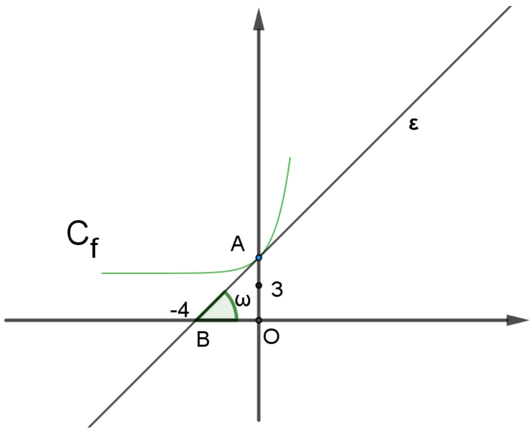
B₄. Έστω σημείο $M(x,\ f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με $x \in \left[0,\ 2\sqrt{2}\right]$ και Κ και Λ οι προβολές του σημείου Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΚΜΛ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και μία ευθεία ε που εφάπτεται της C_f στο σημείο A, στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφική παράσταση της f για $x \in (-10, 2)$ καθώς και η ευθεία ε που εφάπτεται της C_f στο σημείο A.



Επίσης για την συνάρτηση f ισχύει:

$f(x+y) = f(x)f(y) - 3\left[f(x) + f(y)\right] + 12$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

(Μονάδες 7)

Γ₂. Έστω $f(0) = 4$ και $f'(0) = 1$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = f(x) - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Γ₃. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - 3}{e^x}$ είναι σταθερή και στην συνέχεια να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

Γ₄. Αν $f(x)=e^{x}+3$ να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $h(x)=4f(x)+x^{6}+6x^{2}-4x-15$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -13 και ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=17$
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^{2}f(3)-9f(x)}{x-3}=-33$
- $f'(x)>3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₁. Να δείξετε ότι $f'(3)=5$ και $f(3)=2$.

(Μονάδες 7)

Δ₂. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left[f\left(x-2017\right)-15\right]>0,\ \ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,3\right)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$

(Μονάδες 6)

Δ₄. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

(Μονάδες 7)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

● Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

● Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

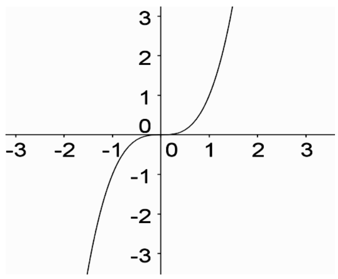
Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α₂.

α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Είναι $f'(x) = 3x^2$, και $f'(0) = 0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Α₃.

1	2	3	4
δ	β	γ	α

Α₄. α $\longrightarrow$ Σ, β $\longrightarrow$ Λ, γ $\longrightarrow$ Λ, δ $\longrightarrow$ Σ, ε $\longrightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

B₁. Για κάθε $x \in \left[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right]$ ισχύει $x^2 + f^2(x) = 8$ (1)

Αν ρ είναι ρίζα της f τότε $f(\rho) = 0$, η (1) για $x = \rho$ γίνεται

$\rho^2 + f^2(\rho) = 8 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = \pm 2\sqrt{2}$

Άρα ρίζες της f είναι η $x = 2\sqrt{2}$ και $x = -2\sqrt{2}$.

B₂. Επομένως είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε

$x \in \left(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$ και αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο

στο $\left(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$. Επειδή $f\left(\dfrac{1}{2020}\right) > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$ οπότε

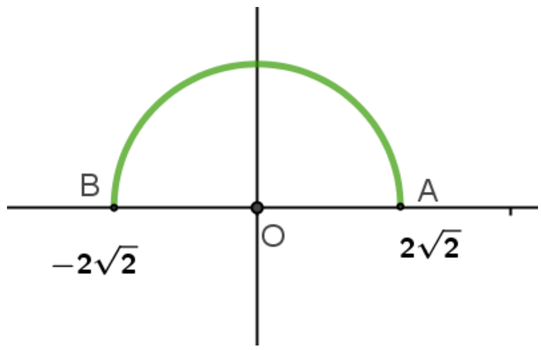
$f^2(x) = 8 - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{8 - x^2} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \sqrt{8 - x^2}$, $x \in \left(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$.

Είναι $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = 0$ άρα

$f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ για κάθε

$x \in \left[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right]$

Της οποίας η γραφική παράσταση είναι το ημικύκλιο του διπλανού σχήματος



B₃. Αν A, B δύο τυχαία σημεία της C_f τότε $(AB) \leq 2\rho \Leftrightarrow (AB) \leq 4\sqrt{2}$.

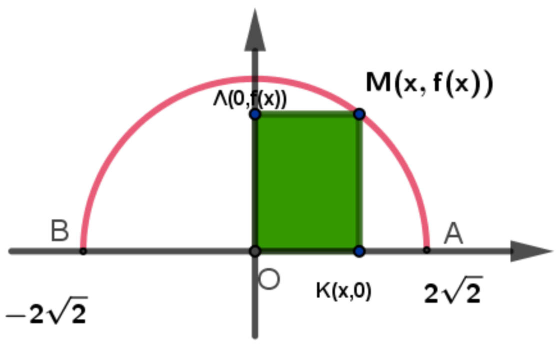
B₄. Για κάθε $x \in \left[0\ ,2\sqrt{2}\right]$

είναι $M(x\ ,\ f(x)), K(x\ ,0)$ και $\Lambda(0\ ,\ f(x))$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΚΜΛ είναι

$(OKM\Lambda) = (OK).(O\Lambda)$

Και γράφεται ως συνάρτηση του x στην παρακάτω μορφή



$$E(x)=|x|\cdot|f(x)| \underset{f(x)>0}{\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}} E(x)=x\cdot f(x) \Leftrightarrow E(x)=x\sqrt{8-x^2}$$

Η $E(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0\,,2\sqrt{2}\right]$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $y=x$ και $y=\sqrt{8-x^2}$ (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)

Και παραγωγίσιμη στο $\left(0\,,2\sqrt{2}\right)$ με

$$E'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-x^2-x^2}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

Είναι $E'(x)=0 \Leftrightarrow 8-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \overset{x\in\left(0,2\sqrt{2}\right)}{\Longleftrightarrow} x=2$.

x	0	2	$2\sqrt{2}$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Μέγιστο

Επομένως η συνάρτηση $E(x)$ που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ παίρνει μέγιστη τιμή όταν $x=2$, άρα $M(2\,,f(2))=(2\,,2)$ δηλαδή το ΟΚΜΛ γίνεται τετράγωνο αφού είναι ορθογώνιο και $(OK)=(O\Lambda)=2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Επειδή η σχέση $f(x+y)=f(x)f(y)-3\left[f(x)+f(y)\right]+12$ (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Για $x=y=0$ έχουμε $f(0)=f(0)f(0)-3\left[f(0)+f(0)\right]+12 \Leftrightarrow$ $f(0)=f^2(0)-6f(0)+12 \Leftrightarrow f^2(0)-7f(0)+12=0 \Leftrightarrow f(0)=3$ ή $f(0)=4$ Από τη γραφική παράσταση που μας δίνεται βλέπουμε ότι το σημείο $(0,3)$ δεν ανήκει στην C_f επομένως θα είναι $f(0)=4$. Η εφαπτομένη ευθεία ε της C_f στο $A(0,4)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(-4,0)$ και σχηματίζει με αυτόν οξεία γωνία ω , είναι $(OA)=(OB)=4$ δηλαδή OAB τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές άρα $\omega=45^{o}$ επομένως $f'(0)=\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi 45^{o}=1$.

Γ₂. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-4}{x}$ άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-4}{x}=1$

Για να δείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξω ότι είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.
Θέτω $x-x_0=h$ Τότε $x=h+x_0$ και όταν $x\to x_0$ το $h\to 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(x_0)-3\left[f(h)+f(x_0)\right]+12-f(x_0)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(x_0)-3f(h)-3f(x_0)+12-f(x_0)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(x_0)-4f(x_0)-3f(h)+12}{h}=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{f(h)-4}{h}-3\frac{f(h)-4}{h}\right]=$$
$$f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4}{h}-3\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4}{h}=f(x_0)f'(0)-3f'(0)=f(x_0)-3.$$

Δηλαδή για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x_0)=f(x_0)-3$, οπότε $f'(x)=f(x)-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ₃. Η $g(x)=\dfrac{f(x)-3}{e^x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\left[e^{-x}\left(f(x)-3\right)\right]'=-e^{-x}\left(f(x)-3\right)+e^{-x}f'(x)=$
$-e^{-x}\left(f(x)-3\right)+e^{-x}\left(f(x)-3\right)=0$

Άρα $g(x)=c$ για $x=0$, $g(0)=\dfrac{f(0)-3}{e^0}=\dfrac{4-3}{1}=1$ επομένως

$$g(x)=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-3}{e^x}=1\Leftrightarrow f(x)=e^x+3,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Γ₄. Είναι $h(x)=4f(x)+x^6+6x^2-4x-15=4(e^x+3)+x^6+6x^2-4x-15$ άρα $h(x)=4e^x+x^6+6x^2-4x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Έχουμε
$h'(x)=4e^x+6x^5+12x-4$ με προφανή ρίζα το 0 δηλαδή $h'(0)=0$
$h''(x)=4e^x+30x^4+12>0$ επομένως η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για

$x<0 \overset{h' \ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow} h'(x)<h'(0) \Leftrightarrow h'(x)<0$

Για

$x>0 \overset{h' \ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow} h'(x)>h'(0) \Leftrightarrow h'(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε	

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και για $x=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $h(0)=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -13 έχουμε $f(0)=-13$

Δ₁.

- $$\lim_{x\to3}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{xf(x)-xf(3)+xf(3)-3f(3)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x\left[f(x)-f(3)\right]+f(3)\left(x-3\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left[x\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]+\lim_{x\to3}\frac{f(3)\left(x-3\right)}{x-3}=$$

$3f'(3)+f(3)$ πρέπει $3f'(3)+f(3)=17 \quad (1)$

- $$\lim_{x\to3}\frac{x^2f(3)-9f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2f(3)-9f(x)-9f(3)+9f(3)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(3)\left(x^2-9\right)-9\left(f(x)-f(3)\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(3)\left(x^2-9\right)}{x-3}-\lim_{x\to3}\frac{9\left(f(x)-f(3)\right)}{x-3}=$$

$$f(3)\lim_{x\to3}\frac{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}{x-3}-9\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6f(3)-9f'(3)$$

Πρέπει $6f(3)-9f'(3)=-33 \quad (2)$ Από (1) και (2) έχουμε

$$\begin{cases} 3f'(3)+f(3)=17 \\ -9f'(3)+6f(3)=-33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9f'(3)+3f(3)=51 \\ -9f'(3)+6f(3)=-33 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 9f(3)=18 \Leftrightarrow f(3)=2$$

Και από την (1) $3f'(3)+2=17 \Leftrightarrow f'(3)=5$

Δ₂. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(x) > 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$ επομένως ορίζεται η αντίστροφή της.

$$f^{-1}\left[f\left(x-2017\right)-15\right] > 0 \overset{f \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left[f\left(x-2017\right)-15\right]\right) > f(0) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x-2017\right)-15 > -13 \Leftrightarrow f\left(x-2017\right) > 2 \Leftrightarrow f\left(x-2017\right) > f(3) \overset{f \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow}$$

$$x-2017 > 3 \Leftrightarrow x > 2020 .$$

Δ₃. Η f είναι Παραγωγίσιμη στο $\left[0,3\right]$ άρα συμφώνα με το Θ.Μ.Τ διαφορικού λογισμού θα υπάρχει $\xi \in \left(0,3\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{2-(-13)}{3} = 5 .$$

Η f' είναι Παραγωγίσιμη (αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη) στο $\left[\xi,3\right] \subseteq \left[0,3\right]$

$f'(\xi) = f'(3) = 5$ Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle Θα υπάρχει

$x_0 \in \left(\xi,3\right) \subseteq \left(0,3\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Δ₄. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών της f.

$A = \left(-\infty,+\infty\right)$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) .$$

Έχουμε $f'(x) > 3 \Leftrightarrow f'(x) - 3 > 0$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $g'(x) = f'(x) - 3 > 0$ Δηλαδή η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0 \overset{g \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - 3x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 3x - 13$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-13\right) = -\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Για $x > 0 \overset{g \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - 3x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 3x - 13$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-13\right) = +\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επομένως $D_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(-\infty,+\infty\right)$