

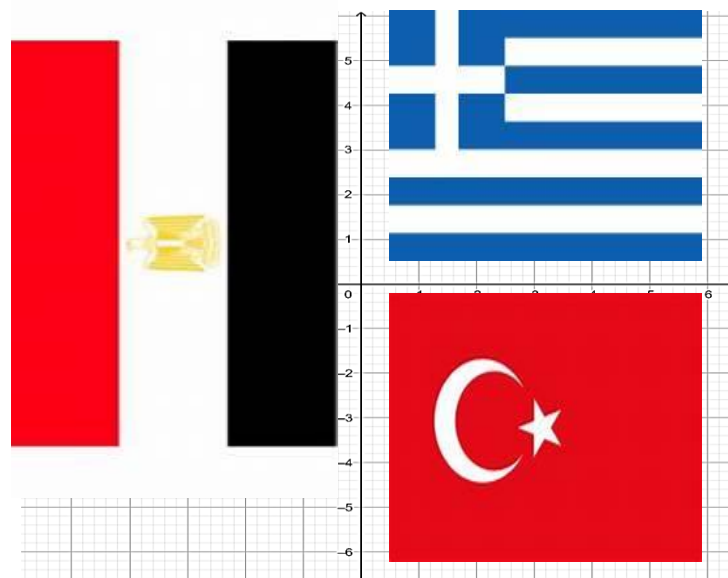
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

2018
2019

Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών σπουδών και σπουδών
Οικονομίας και Πληροφορικής

8ο Πρόβλημα

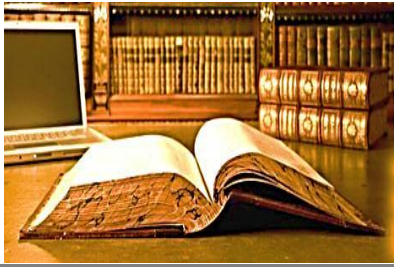
Ένα ελληνικό πολεμικό πλοίο κινείται επί της καμπύλης $y = ax^2 - 4x + 1, x > 0$ όπου $a \in \mathbb{N}$ με $a > 4$ και x η απόσταση που διανύει το πλοίο σε χιλιάδες ναυτικά μίλια.



Στη παραπάνω σύστημα αξόνων Οxy φαίνονται τα χωρικά ύδατα της κάθε χώρας.

- Να βρείτε για ποιά τιμή του a το πολεμικό πλοίο κινείται αποκλειστικά στα χωρικά ύδατα της Ελλάδας.
- Να εξηγήσετε γιατί το πολεμικό πλοίο δεν ακουμπά τα σύνορα με την Αίγυπτο και να βρείτε σε τι απόσταση από τα χωρικά ύδατα της Αιγύπτου μπορεί να βρεθεί πάνω στο σύνορο με τα χωρικά ύδατα της Τουρκίας.
- Εστω a ο ελάχιστος αριθμός που ικανοποιεί τους περιορισμούς. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολεμικού πλοίου, την στιγμή που ο ρυθμός με τον οποίο απομακρύνεται από τα χωρικά ύδατα της Τουρκίας είναι δπλάσιος από τον ρυθμό με τον οποίο απομακρύνεται απο τα χωρικά ύδατα της Αιγύπτου.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης τη στιγμή όπου το πολεμικό πλοίο απομακρύνεται με τον ίδιο ρυθμό από τα χωρικά ύδατα των άλλων κρατών

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΝΑΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΣΕΙΡΑΣ "ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ"



Λύση 7ου Προβλήματος

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο και A, B οι προβολές του στους άξονες Ox και Oy

αντίστοιχα, τότε είναι $OA = x > 0$ και $OB = AM = y > 0$

Στο τρίγωνο OAM ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, άρα

$$x^2 + y^2 = 68 \text{ και λόγω της καμπύλης } y = 2x^2, \text{ άρα } x^2 = \frac{y}{2}$$

Οπότε έχουμε $y^2 + y - 136 = 0 \Leftrightarrow y = 8$ ή $y = -\frac{17}{2}$. Δεκτή η τιμή $y = 8$

Άρα $x = 2$

α) $y = 2x^2 \Leftrightarrow y(t) = 2x^2(t) \Leftrightarrow y'(t) = 4x(t) \cdot x'(t)$ **(1)**

Έχουμε $x'(t) = 3\text{cm/sec}$ και $x(t) = 2$ άρα

$$y'(t) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24\text{cm/sec}$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$E(t) = x(t)y(t) \Leftrightarrow E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t) = 3 \cdot 8 + 24 \cdot 2 = 72\text{cm}^2/\text{sec}$$

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχουμε $\epsilon\phi\theta = \frac{y}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$, οπότε

$$\epsilon\phi\theta(t) = 2x(t) \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = 2x'(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = 2x'(t)\sin^2\theta(t)$$
 (2)

Στο OAM έχουμε: $\sin\theta = \frac{MA}{MO} = \frac{2}{\sqrt{68}} \Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{17}$, Οπότε

$$\theta'(t) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{17} = \frac{6}{17}\text{rad/sec}$$

δ) Έχουμε ότι $y'(t) = 2x'(t)$, οπότε λόγω της **(1)**: $2x'(t) = 4x(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}$

οπότε $y(t) = 2x^2(t) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Άρα αναζητούμε την εφαπτομένη της καμπύλης y

στο σημείο της $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $y - \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$

