∀fter — maths

Μάρκος Βασίλης Αθηνα 2020

Λυμένα Παραδείγματα και Θέματα

Γ΄ Λυκείου: Συναρτήσεις

Πρόλογος

Το παρόν αποτελεί μία συλλογή λυμένων παραδειγμάτων και θεμάτων πάνω στην ύλη της πρώτης ενότητας των Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ′ Γενικού Λυκείου. Τα παραδείγματα που θα βρείτε εδώ μέσα είναι απλά, εν γένει, και στοχεύουν στο να εμπεδωθούν οι βασικές έννοιες της ενότητας. Ωστόσο, τα λυμένα θέματα που βρίσκονται στο τέλος του παρόντος είναι πιο απαιτητικά και απαιτούν συνδυασμό των γνώσεων που έχει αποκτήσει ως τώρα ο/η μαθητής/τρια.

Το παρόν αποτελεί μέρος σειράς σημειώσεων, λυμένων παραδειγμάτων και, γενικότερα, διδακτικού υλικού για όλες τις τάξεις του λυκείου που μπορείτε να βρείτε στο **aftermathsgr.wordpress.com**. Για λάθη, διορθώσεις, παραλείψεις και προτάσεις επικοινωνήστε μαζί μου είτε μέσω e-mail στο `vassileiosmarkos@gmail.com` είτε μέσω της φόρμας επικοινωνίας: **https://aftermathsgr.wordpress.com/contact/**.

Καλό διάβασμα!

1 Ορισμός της συνάρτησης

Παράδειγμα 1.1. Η αντιστοίχιση $f : A \to B$ όπου:

$$\begin{aligned} A &= \text{το σύνολο όλων των κλειδιών της Αθήνας} \\ B &= \text{το σύνολο όλων των πορτών της Αθήνας} \end{aligned}$$

που αντιστοιχίζει κάθε κλειδί στην πόρτα την οποία ξεκλειδώνει, αγνοώντας τα κλειδιά πασπαρτού είναι μία συνάρτηση αφού **κάθε κλειδί** ξεκλειδώνει ακριβώς **μία** πόρτα.

Αντιθέτως, η αντιστοίχιση $g : B \to A$ που αντιστοιχίζει κάθε πόρτα στα κλειδιά που την ξεκλειδώνουν *δεν είναι συνάρτηση* καθώς, αν σε ένα σπίτι μένουν περισσότερα του ενός άτομα τότε, ενδεχομένως, να υπάρχουν πάνω από ένα κλειδιά που ξεκλειδώνουν την ίδια πόρτα.

□

Σχόλιο

Πασπαρτού λέγεται ένα αντικλείδι που ανοίγει όλες τις κλειδαριές (εκ του passe partout των γαλλικών που σημαίνει «περνάει από παντού»)1. Πασπαρτού έλεγαν και τον (ταλαίπωρο) υπηρέτη του Φιλέα Φογκ στο γνωστό έργο του Ιουλίου Βερν «Ο γύρος του κόσμου σε 80 ημέρες».

Παράδειγμα 1.2. Η αντιστοίχιση Παιδί : $A \to B$ όπου:

$$\begin{aligned} A &= \text{το σύνολο των ενηλίκων που ζουν στην Σουμάτρα} \\ B &= \text{το σύνολο των ανθρώπων που ζουν στην Σουμάτρα} \end{aligned}$$

που αντιστοιχίζει κάθε γονέα στο παιδί του, δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση, καθώς ενδέχεται να μην ικανοποιείται καμμία από τις δύο ιδιότητες του ορισμού. Δηλαδή:

1. ενδέχεται να υπάρχει κάποιος ενήλικας, ας τον ονομάσουμε E, που δεν έχει παιδιά, άρα η τιμή Παιδί(E) δεν ορίζεται,
2. ενδέχεται κάποιος γονέας να έχει δύο ή περισσότερα παιδιά.

□

Παράδειγμα 1.3. Η αντιστοίχιση $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο x^2 είναι συνάρτηση καθώς, κάθε πραγματικός αριθμός έχει έναν και μόνο αριθμό που είναι το τετράγωνό του.

□

Παράδειγμα 1.4. Η αντιστοίχιση $F : T \to K$ όπου:

$$\begin{aligned} T &= \text{το σύνολο όλων των τεντζέρηδων του κόσμου} \\ K &= \text{το σύνολο όλων των καπακιών του κόσμου} \end{aligned}$$

που αντιστοιχίζει κάθε τέντζερη στο καπάκι του είναι συνάρτηση, αν εμπιστευτούμε τον θυμόσοφο λαό μας. Η αντιστοίχιση $H : K \to F$ που αντιστοιχίζει κάθε καπάκι στον τέντζερή της δεν είναι συνάρτηση γιατί δεν είναι απαραίτητο όλα τα καπάκια του κόσμου να είναι καπάκια κάποιου τέντζερη.

□

Σχόλιο

Τέντζερη λέμε γενικά οποιοδήποτε χάλκινο μαγειρικό σκεύος, αν και, τώρα πια, αποτελεί παρωχημένο όρο.

2 Ισότητα συναρτήσεων

Παράδειγμα 2.1. Αν $f(x) = x^4$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^4$ με $x \in [0, 1]$ τότε $f \neq g$ αφού, αν και οι f, g έχουν τον ίδιο τύπο, δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

□

Παράδειγμα 2.2. Αν $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ με $x \in (1, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$ με $x \in (1, +\infty)$ τότε οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και, όπως θα δείξουμε, έχουν τον ίδιο τύπο. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)} = \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1))}{x-1} = \sqrt{x}+1 = \\ &= g(x) \end{aligned}$$

οπότε οι δύο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο, άρα είναι ίσες, δηλαδή $f = g$.

□

3 Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Παράδειγμα 3.1. Για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 + 4x - 5}$$

έχουμε:

- Ο παρονομαστής πρέπει να μη μηδενίζεται, επομένως, θέλουμε:

  $$x^2 + 4x - 5 \neq 0.$$

  Επιλύουμε την εξίσωση:

  $$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -5$$

  οπότε παίρνουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς:

  $$x \neq 1 \text{ και } x \neq -5.$$

- Θέλουμε η υπόρριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

  $$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

  δηλαδή $x \in [2, +\infty)$.

- Συναληθεύουμε του περιορισμούς και βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:
$$D_f = [2, +\infty).$$

□

Παράδειγμα 3.2. Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

υέλουμε ο παρονομαστής να είναι μη μηδενικός. Συνεπώς θα βρούμε όλα τα σημεία στα οποία ο παρονομαστής μηδενίζεται και θα τα εξαιρέσουμε από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Έχουμε λοιπόν:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2,$$

επομένως:
$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

□

Παράδειγμα 3.3. Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{\sqrt{x+2} - 1}$$

έχουμε:

- Η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

δηλαδή $x \in (-1, +\infty)$.

- Η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

δηλαδή $x \in [-2, +\infty)$.

- Ο παρονομαστής πρέπει να είναι μη μηδενικός, δηλαδή:

$$\sqrt{x+2} - 1 \neq 0.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

οπότε παίρνουμε τον περιορισμό:

$$x \neq -1.$$

- Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:
$$D_f = (-1, +\infty).$$

□

Παράδειγμα 3.4. Για τη συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$$
έχουμε:

- Η εσωτερική υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:
$$x \geq 0$$
δηλαδή $x \in [0, +\infty)$.
- Η ενδιάμεση υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:
$$1 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$
δεδομένου ότι $x \geq 0$, δηλαδή $x \in [0, 1]$.
- Η εξωτερική υπόρριζη παράσταση πρέπει να είναι μη αρνητική:
$$1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0$$
το οποίο ισχύει για κάθε $x \geq 0$.
- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:
$$D_f = [0, 1].$$

□

Παράδειγμα 3.5. Για τη συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = (x^2 - 1)^{\ln x}$$
έχουμε:

- Η βάση της δύναμης πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:
$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$
δηλαδή $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- Η παράσταση μέσα στον λογάριθμο να είναι θετική, δηλαδή:
$$x > 0$$
δηλαδή $x \in (0, +\infty)$.
- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:
$$D_f = (1, +\infty).$$

□

4 Σύνολο τιμών συνάρτησης

Παράδειγμα 4.1. Αν $f(x) = x^2-4$, $x \in [0,6]$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f, ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$0 \leq x \leq 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f:

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 4 \leq 32. \end{aligned}$$

Επομένως, $f([0,6]) = [-4,32]$.

□

Παράδειγμα 4.2. Αν $f(x) = 2 - 4\sqrt{x-2}$, $x \in [2,6)$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f, ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$2 \leq x < 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f:

$$\begin{aligned} &2 \leq x < 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x - 2 < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-2} < 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \geq -4\sqrt{x-2} > -8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \geq 2 - 4\sqrt{x-2} > -6, \end{aligned}$$

Επομένως, $f([2,6)) = (-6,2]$.

□

5 Σύνθεση συναρτήσεων

Παράδειγμα 5.1. Αν $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}$, τότε η σύνθεση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \left\{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} < 1 \text{ ή } \sqrt{x+2} > 1\right\} = \\ &= \left\{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} \neq 1\right\} = \end{aligned}$$

$$= \{x \in [-2, +\infty) \mid x \neq -1\} =$$
$$= [-2, -1) \cup (-1, +\infty).$$

Από την άλλη, η σύνθεση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid \frac{1}{x-1} \in [-2, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid \frac{1}{x-1} \geq -2\right\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right\} = \\ &= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 5.2. Αν $f(x) = e^{x+1}$ και $g(x) = 2\ln x$ τότε η σύνθεση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = e^{2\ln x + 1} = e^{\ln x^2 + 1} = ee^{\ln x^2} = ex^2.$$

Για το πεδίο ορισμού της έχουμε:

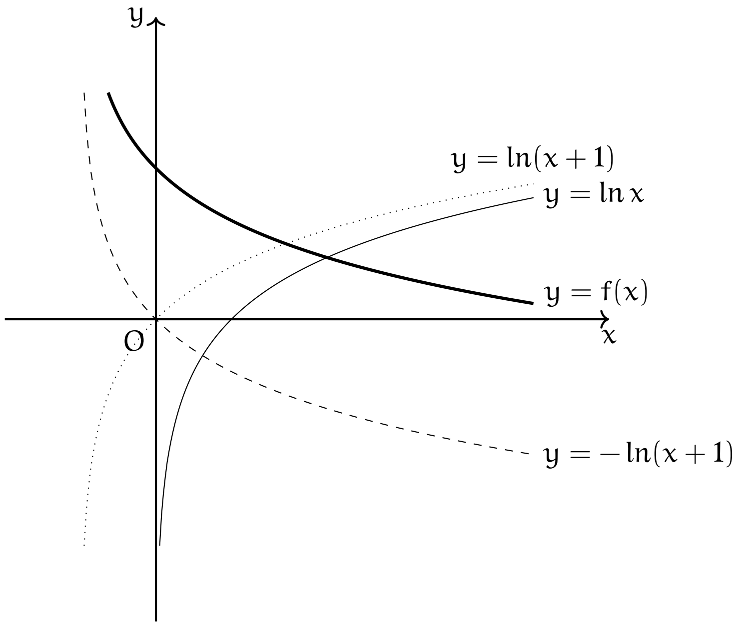
$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x > 0 \mid 2\ln x \in \mathbb{R}\} = \\ &= (0, +\infty). \end{aligned}$$

□

6 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

Παράδειγμα 6.1. Αν $f(x) = 2 - \ln(x+1)$, με $x > -1$, τότε για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$,
2. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1, παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\ln(x+1)$,
3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της $\ln(x+1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1)$ και, τέλος,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1) + 2$, δηλαδή της f.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \ln(x+1)$

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 1.

□

Παράδειγμα 6.2. Αν $f(x) = \left|\frac{1}{2-x}\right|$, με $x \neq 2$ τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$,
2. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\frac{1}{x}$, δηλαδή της $\frac{1}{-x}$,
3. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{-(x-2)}$, δηλαδή τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{2-x}$, και, τέλος,
4. σχεδιάζοντας και τη συμμετρική της $\frac{1}{2-x}$ ως προς τον άξονα $x'x$ και κρατώντας τα τμήματα που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\left|\frac{1}{-(x-2)}\right|$, δηλαδή της f.

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 2.

□

Σχόλιο

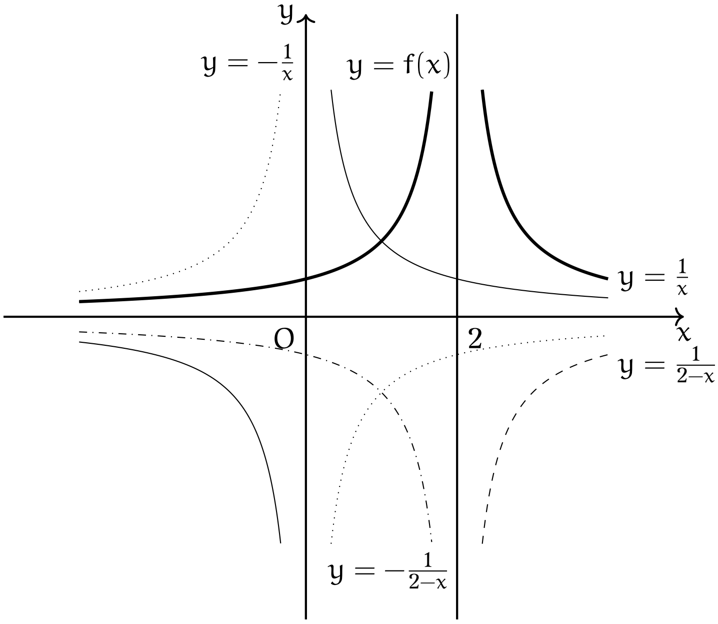
Ίσως μας βοηθήσει να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f(x) = \left|\frac{1}{-(x-2)}\right|$$

έτσι ώστε να φαίνεται η οριζόντια μεταφορά κατά 2 προς τα δεξιά.

Παράδειγμα 6.3. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{1+|x|}$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x}$,
2. με μία μετατόπιση κατά 1 προς τα αριστερά σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x-(-1)}$, δηλαδή της $\sqrt{x+1}$,



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \left|\frac{1}{2-x}\right|$

3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\sqrt{x+1}$,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 προς τα πάνω παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2-\sqrt{x+1}$ και, τέλος,
5. σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $2-\sqrt{1-x}$ και κρατώντας, αν $x \geq 0$ τη γραφική παράσταση της $2-\sqrt{1+x}$ και αν $x < 0$ τη γραφική παράσταση της $2-\sqrt{1-x}$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2-\sqrt{1+|x|}$, δηλαδή της $f(x)$.

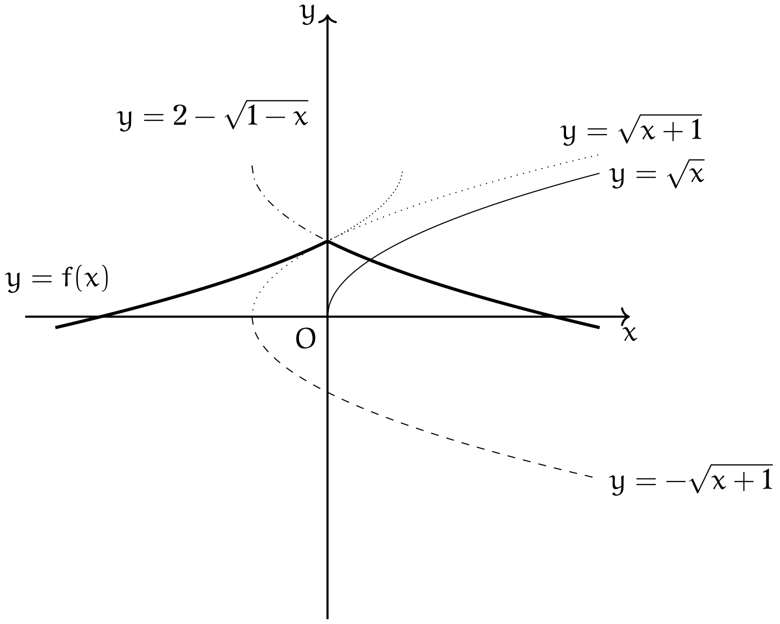
Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 3.

□

7 Μονοτονία

Παράδειγμα 7.1. Αν $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$, με $x \in (2, +\infty)$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1-2}} > \frac{1}{\sqrt{x_2-2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1-2}} > \frac{2}{\sqrt{x_2-2}} \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{1+|x|}$

επομένως, αφού έχουμε ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

□

Παράδειγμα 7.2. Αν $f(x) = x^5+x^3+x+1$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \tag{1}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \tag{2}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \tag{3}$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$x_1^5 + x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^5 + x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

□

Παράδειγμα 7.3. Αν $f(x) = \ln(1 + x^2)$, με $x \in \mathbb{R}$ τότε, για την μονοτονία της f πρέπει να είμαστε πρώτα λίγο προσεκτικοί. Αν ξεκινήσουμε όπως πριν και πάρουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε δεν μπορούμε να πάμε και πολύ παρακάτω, διότι η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

δεν είναι αληθής για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (πάρτε, για παράδειγμα $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$). Επίσης, δεν ισχύει ούτε η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε όπως πριν, «χτίζοντας» τον τύπο της f. Είμαστε όμως αρκετά τυχεροί έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο ακόλουθες ανισότητες:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in [0, +\infty)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (-\infty, 0].$$

Επομένως, μπορούμε να εργαστούμε ξεχωριστά στα δύο διαστήματα $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$. Έστω, λοιπόν, πρώτα $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 < 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) < \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 > 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) > \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Εδώ, μπορούμε, επιπρόσθετα, να έχουμε και ένα συμπέρασμα για τα ακρότατα της f. Ξεκινώντας από τη γνωστή ανισότητα $x^2 \geq 0$, έχουμε, διαδοχικά:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x^2) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = 0$, έχουμε ότι:

$$f(x) \geq f(0)$$

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$. Όλα αυτά μπορούμε να τα αναπαραστήσουμε και σε έναν πίνακα όπως ο πίνακας 1

□

Σχόλιο

Για την απόδειξή τους μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμών είτε να παρατηρήσετε ότι και οι δύο προκύπτουν άμεσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	Ολ. Ελ.	$\nearrow$	

Πίνακας 1: Η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Παράδειγμα 7.4. Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \mathbb{R}$, τότε, δεν μπορούμε να πούμε κάτι για τη μονοτονία της f με σχετική ευκολία, μπορούμε όμως να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, ας ξαναγράψουμε τον τύπο της συνάρτησης f ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 - \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}. \end{aligned}$$

Τώρα, από τις ανισότητες $y^2 \geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\, x \leq 1$ παίρνουμε την ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$0 \leq \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 1$$

οπότε, διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq 1+\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \geq \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq -\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 1-1 \leq 1-\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} \leq 1-\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1+0} = 0$, έχουμε ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$$

οπότε, από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\frac{\pi}{2}$, το 0, ενώ από τη δεύτερη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $\frac{1}{2}$.

$\square$

Σχόλιο

Αν θέλετε μπορείτε να αξιοποιήσει την μονοτονία της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu\, x$ στα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[\pi, 2\pi]$ καθώς και το πρόσημο της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu\, x$ και να προσπαθήσετε να «χτίσετε» τον τύπο της f.

8 Συναρτήσεις «1-1»

Παράδειγμα 8.1. Αν $f(x) = \ln(2x+3)$, $x > -\frac{3}{2}$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, αν $x, y > -\frac{2}{3}$ με $f(x) = f(y)$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \ln(2x+3) = \ln(2y+3) \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^{\ln(2y+3)} \\ &\Leftrightarrow 2x+3 = 2y+3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 2y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα, από το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού, η f είναι 1-1.

□

9 Αντίστροφη συνάρτηση

Παράδειγμα 9.1. Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, με $x \neq -1$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x, y \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ με $f(x) = f(y)$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \\ &\Leftrightarrow (x-1)(y+1) = (y-1)(x+1) \\ &\Leftrightarrow xy + x - y - 1 = xy + y - x - 1 \\ &\Leftrightarrow x - y = y - x \\ &\Leftrightarrow 2x = 2y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Ο τύπος της f^{-1} είναι ο:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x+1} \\ &\Leftrightarrow y(x+1) = x-1 \\ &\Leftrightarrow yx + y = x - 1 \\ &\Leftrightarrow yx - x = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{y-1},\ y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{1-y},\ y \neq 1. \end{aligned}$$

Επομένως, ο τύπος της f^{-1} είναι:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}$$

ή, αν προτιμάτε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

και το πεδίο ορισμού της είναι το

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

το οποίο είναι και το σύνολο τιμών της f.

□

10 Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων

Παράδειγμα 10.1. Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x - 1 = e - \ln x$$

τότε, αφού ξεχωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους έχουμε:

$$x + \ln x = 1 + e$$

η οποία, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$ (η οποία όπως έχουμε δει είναι 1-1) γράφεται:

$$f(x) = 1 + e.$$

Εδώ σταματάμε και σκεφτόμαστε: για ποια τιμή $a > 0$ έχουμε ότι $f(a) = 1 + e$; Μετά από λίγες δοκιμές, καταλήγουμε στο ότι $f(e) = e + \ln e = e + 1$, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(e)$$

οπότε, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = e$.

□

Παράδειγμα 10.2. Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$e^x + \sqrt{x+1} = 1$$

τότε, θεωρώντας της συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x+1}, \ x \geq -1$$

έχουμε ότι αυτή είναι 1-1. Επειδή είναι δύσκολο να χειριστούμε την εξίσωση $f(x) = f(y)$ λόγω του εκθετικού, θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \quad (1)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

και, προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1+1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Οπότε, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 1$$

και, παρατηρώντας ότι $f(0) = 1$, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = f(0)$$

και, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$.

□

Παράδειγμα 10.3. Αν θέλουμε να λύσουμε την ανισότητα:

$$e^x + \sqrt{x+1} \leq 1$$

τότε, θεωρούμε την γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x+1} \; x \geq -1$$

οπότε η ανισότητα γράφεται:

$$f(x) \leq f(0) \Rightarrow x \leq 0.$$

Συναληθεύοντας και με τον περιορισμό $x \geq -1$, οι λύσεις της δοσμένης ανισότητας είναι όλοι οι αριθμοί $x \in [-1, 0]$.

□

11 Γενικά θέματα

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x-3}.$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (1 μονάδα)
2. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
5. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x-2) > 4.$$

6. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f|$.

Λύση.

1. Πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$, επομένως:

$$D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty).$$

2. Ξαναγράφουμε τον τύπο της f (όπως έχουμε κάνει τόσες φορές) ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = \\ &= \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}. \end{aligned}$$

Έστω, τώρα, $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$. Διαδοχικά:

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \\ \Rightarrow\ & x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{x_1-3} > \frac{1}{x_2-3} \\ \Rightarrow\ & \frac{3}{x_1-3} > \frac{3}{x_2-3} \\ \Rightarrow\ & 1 + \frac{3}{x_1-3} > 1 + \frac{3}{x_2-3} \\ \Rightarrow\ & f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3, +\infty)$. Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3)$.

3. *Πριν προχωρήσουμε στη λύση να παρατηρήσουμε ότι το επιχείρημα «γνησίως φθίνουσα, άρα 1-1» δεν έχει εδώ εφαρμογή, αφού η f δεν είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της!*

Με βάση τον ορισμό, έστω $x, y \in D_f$ με $f(x) = f(y)$. Διαδοχικά:

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \Rightarrow\ & \frac{x}{x-3} = \frac{y}{y-3} \\ \Rightarrow\ & x(y-3) = y(x-3) \\ \Rightarrow\ & xy - 3x = xy - 3y \\ \Rightarrow\ & -3x = -3y \\ \Rightarrow\ & x = y, \end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Για την εύρεση της αντίστροφης, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Rightarrow\ & \frac{x}{x-3} = y \\ \Rightarrow\ & x = y(x-3) \\ \Rightarrow\ & x = xy - 3y \end{aligned}$$

Σχόλιο

Για την ακρίβεια, το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x - xy = -3y \\ &\Rightarrow x(1-y) = -3y \\ &\Rightarrow x = \frac{3y}{y-1} \end{aligned}$$

;ρα $f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-1}$.

4. Το σύνολο τιμών της f, $f(D_f)$, είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως, εύκολα βλέπουμε ότι ($x - 1 \neq 0$):

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. Εδώ θέλει λίγη προσοχή. Ένας τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε τον τύπο της f^{-1} και να κάνουμε κανονικά τις πράξεις, όπως ξέρουμε από την πρώτη λυκείου. Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x-2) > 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3(x-2)}{x-3} > 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3x-6}{x-3} - 4 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3x-6-4(x-3)}{x-3} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3x-6-4x+12}{x-3} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-x+6}{x-3} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-x+6)(x-3) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \in (3, 6). \end{aligned}$$

Αν όμως θέλουμε να εκμεταλλευτούμε όσα έχουμε ως τώρα (μονοτονία κ.λπ.), πρέπει να προσέξουμε τα παρακάτω :

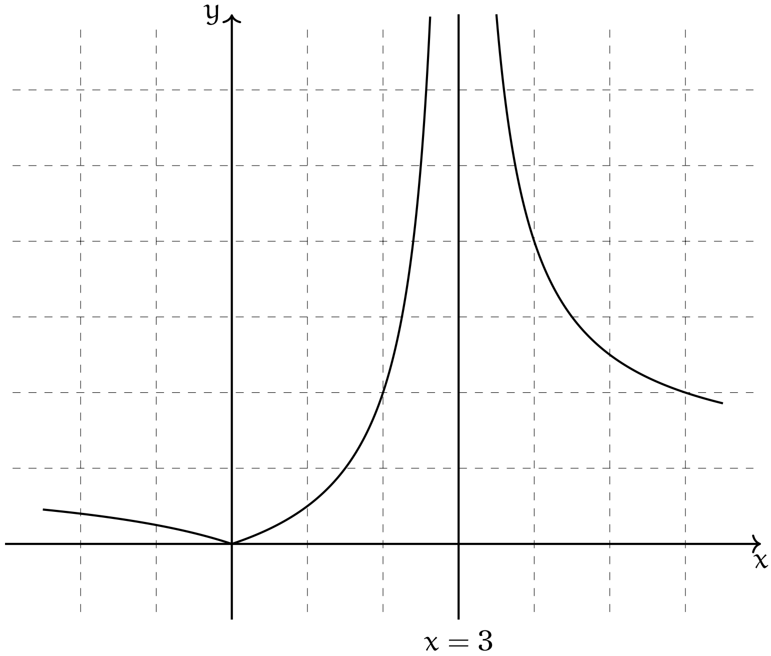
- Πρώτα ελέγχουμε πότε $x - 2 \in D_{f^{-1}}$, οπότε πρέπει $x - 2 \neq 1$, δηλαδή $x \neq 3$.
- Στη συνέχεια, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις, διότι, η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα δεν μπορούμε, «αέρα, πατέρα», να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της.

6. Σχεδιάζουμε, διαδοχικά, τις γραφικές παραστάσεις των $\frac{3}{x}$, $\frac{3}{x-3}$, $1+\frac{3}{x-3}$, $-1-\frac{3}{x-3}$ και, τέλος την $|f|$. Στο σχήμα 1 φαίνεται μόνο η $|f|$.

□

Σχόλιο

Στην προκειμένη, θα κάνουμε, απλά, τη ζωή μας δύσκολη, για μια τόσο απλή ανισότητα. Γενικά, πάντα να έχετε κατά νου ότι δεν είναι μονόδρομος αυτά που μαθαίνουμε φέτος και, το σημαντικότερο, να μην ξεχνάτε τα όσα έχετε μάθει, απλά επειδή φέτος «δίνουμε Πανελλήνιες»!



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της $|f|$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(x + e^x) + 2x.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την εξίσωση:
$$f(x) = \ln\left(e^2 + e^3\right).$$
3. Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να δείξετε ότι:
$$f^{-1}(\ln 12) < 1.$$
4. Θεωρούμε τώρα την εξίσωση:
$$xe^{2x} + e^{3x} - 1 = 0. \tag{†}$$
   (α΄) Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης (†) είναι και ρίζα της f.
   (β΄) Να λύσετε την εξίσωση (†).

Λύση. 1. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}, \tag{1}$$

οπότε, αφού $x_1 < x_2$, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + e^{x_1}) < \ln(x_2 + e^{x_2}). \quad (2)$$

Επίσης,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2, \quad (3)$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3), έχουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Μετά από λίγη προσπάθεια, παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = \ln(x + e^x) + 2x = \ln(x + e^x) + \ln e^{2x} = \ln(xe^{2x} + e^{3x}).$$

Τώρα είναι εμφανές ότι $f(1) = \ln(e^2 + e^3)$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει μία και μοναδική λύση — αφού η f είναι 1-1, την $x = 1$.

3. Από τη γενική θεωρία γνωρίζουμε ότι οι f και f^{-1} «μοιράζονται» την ίδια μονοτονία, επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για τη ζητούμενη ανισότητα, παρατηρούμε ότι:

   - αφού $e > 2$, έπεται ότι $e^2 > 4$ και $e^3 > 8$, άρα $e^2 + e^3 > 12$, άρα,
   $$\ln(e^2 + e^3) > \ln 12.$$
   - από το προηγούμενο ερώτημα:
   $$f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) = 1.$$
   - από την μονοτονία της f^{-1}:
   $$f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) > f^{-1}(\ln 12).$$

   Από όλα τα παραπάνω, έχουμε:

   $$f^{-1}(\ln 12) < f^{-1}(\ln(e^2 + e^3)) = 1.$$

Σχόλιο

Αν θέλετε, αν και δεν χρειάζεται, μπορείτε εύκολα να το δείξετε μέσω του ορισμού, με απαγωγή σε άτοπο.

4. Έχουμε:

   (α΄) Αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (†), τότε:

   $$x_0 e^{2x_0} + e^{3x_0} = 1,$$

   άρα:

   $$f(x_0) = \ln\left(x_0 e^{2x_0} + e^{3x_0}\right) = \ln 1 = 0,$$

   δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της f.

(β΄) Για να δούμε... Από το προηγούμενο, οι μόνοι αριθμοί που είναι και υποψήφιες ρίζες της (†) είναι οι ρίζες της f. Όμως, αφού $f(0) = 0$ και η f είναι 1-1, η μοναδική ρίζα της f είναι το 0. ;ρα, αρκεί να εξετάσουμε αν το 0 είναι λύση της (†). Αντικαθιστώντας βλέπουμε ότι:

$$0 \cdot e^0 + e^0 - 1 = 0,$$

που ισχύει, άρα, η μοναδική λύση της (†) είναι η $x = 0$.

□

Θέμα 3

Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι $f(0) = 1$.
2. Να δείξετε ότι $f(-x) = 2 - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Γίνεται η f να είναι άρτια; Γίνεται η f να είναι περιττή; Αν ναι, ποιος είναι ο τύπος της f; Αν όχι, γιατί;
4. Να δείξετει ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + 1.$$

5. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση:
   (α΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (άρα και αντιστρέψιμη).
   (β΄) Να βρείτε το $f^{-1}(1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x^2 f^{-1}(x)\right) = 1.$$

Λύση.

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση $x = y = 0$, οπότε:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) - 1 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση όπου $y = -x$, οπότε:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) - 1 \Leftrightarrow f(-x) = 1 + f(0) - f(x) = 2 - f(x).$$

Για να είναι η f άρτια, πρέπει να ισχύει $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, από το προηγούμενο ερώτημα θα είχαμε:

$$f(x) = f(-x) = 2 - f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 1,$$

επομένως, γίνεται, αρκεί η f να έχει τύπο $f(x) = 1$.

Για να είναι περιττή, πρέπει να ισχύει $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x) = -f(-x) = -(2 - f(x)) \Leftrightarrow 0 = 2,$$

άρα, για να είναι η f περιττή, πρέπει να ισχύει $0 = 2$. Επειδή αυτό δε φαίνεται να ισχύει, μάλλον η f δεν μπορεί να είναι περιττή.

Σχόλιο

Εναλλακτικά, μπορείτε να παρατηρήσετε ότι για κάθε περιττή συνάρτηση ισχύει $f(0) = 0$, που στην προκειμένη δεν ισχύει.

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση όπου y το $-y$, οπότε, από τα προηγούμενα:

$$f(x - y) = f(x) + f(-y) - 1 = f(x) + 2 - f(y) - 2 = f(x) - f(y) + 1.$$

Έχουμε:

1. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε $f(x) - f(y) = 0$, οπότε, από το προηγούμενο:

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

   Όμως, η εξίσωσης $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση και, αφού $f(0) = 1$, η λύση αυτή είναι το $x = 0$. Αφού $f(x - y) = 1$, έπεται ότι $x - y = 0$, δηλαδή, $x = y$, οπότε η f είναι 1-1.

2. Αφού $f(0) = 1$, άμεσα έπεται ότι $f^{-1}(1) = 0$. Για τη δοσμένη εξίσωση, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται:

$$f\left(x^2 f^{-1}(x)\right) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2 f^{-1}(x) = 0,$$

   οπότε είτε $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ είτε $f^{-1}(x) = 0$, δηλαδή $x = 1$, αφού η f^{-1} είναι 1-1. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Μία συνάρτηση με όλες αυτές τις ιδιότητες που δεν είναι άρτια είναι η $f(x) = x + 1$.

□

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x + 1}.$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1}.
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση. 1. Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Επομένως:

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

2. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} > 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$.

Ομοίως, έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} > 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$.

3. Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι η f είναι «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Διαδοχικά, έχουμε:

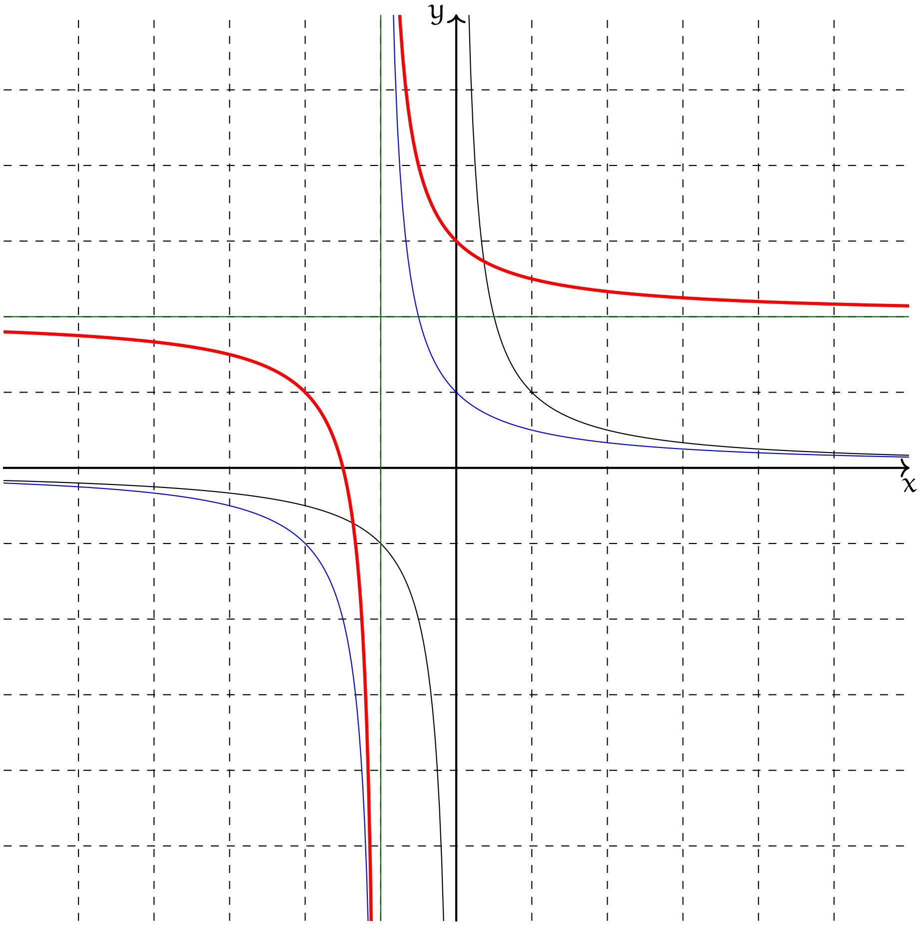
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} = 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

επομένως η f είναι «1-1».

Για να βρούμε την αντίστροφη της f, έστω $y \in \mathbb{R}$ και $x \in D_f$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = y - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{y-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{y-2} - 1, \end{aligned}$$

επομένως, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$ με $x \neq 2$.



Σχήμα 5: Οι γραφικές παραστάσεις των $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$ και $f(x)$.

4. Έχουμε:
$$f(D_f) = D_{f^{-1}} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

5. Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$ (ισοσκελής υπερβολή), με μία μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x+1}$ και με μία μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.

□

Θέμα 5

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με:

- $g(x) = e^x + x^3 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$,
- $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε την εξίσωση:
$$e^x + x^3 - 1 = 0.$$
3. Να λύσετε την ανίσωση:
$$e^x < e + 1 - x^3.$$
4. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{f(0)x^{2020} + f(e)x^2 - 1}{x+1} = 0.$$
5. Να δείξετε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση:
$$f\left(e^{g(x)} + g^3(x) - 1\right) \geq 0.$$

Λύση.

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \quad (1)$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}. \quad (2)$$
Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:
$$e^{x_1} + x1^3 - 1 < e^{x_2} + x_2^3 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$
επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Παρατηρούμε ότι η δοσμένη εξίσωση γράφεται στη μορφή:
$$g(x) = g(0),$$
αφού $f(0 = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Επομένως, δεδομένου ότι η g είναι «1-1» (ως γνησίως αύξουσα), έπεται ότι:
$$g(x) = g(0) \overset{g:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} x = 0.$$

3. Παρατηρούμε ότι η ανίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:
$$e^x + x^3 - 1 < e \Leftrightarrow g(x) < g(1),$$
δεδομένου ότι $g(1) = e^1 + 1 - 1 = e$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:
$$g(x) < g(1) \Leftrightarrow x < 1.$$

4. Αντικαθιστώντας στη σχέση $g(f(x)) = x$ διαδοχικά όπου $x = 0$ και όπου $x = e$, έχουμε:

$$g(f(0)) = 0 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \overset{g:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} f(0) = 0,$$
$$g(f(e)) = e \Leftrightarrow g(f(e)) = g(1) \overset{g:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} f(e) = 1,$$

οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Επειδή πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, έχουμε $x = 1$.

5. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

άτοπο, αφού $x_1 < x_2$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για τη δοσμένη ανισότητα, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται στη μορφή:

$$f(g(g(x))) \geq 0 \Leftrightarrow f(g(g(x)) \geq f(0).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα:

$$g(g(x)) \geq 0 \Leftrightarrow g(g(x)) \geq g(0).$$

Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Τέλος, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα:

$$x \geq 0.$$

□

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^3}{3}$ με $x \in [-1, 1]$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολό τιμών της.

2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη (1 μονάδα) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με αυτήν της f^{-1}.

3. Να λύσετε την εξίσωση:
$$f^{-1}(f(x+1) - 1) = 0,$$
όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της f.

4. Να δείξετε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε (6 μοναδες):
$$\frac{\text{συν}^5\theta + 2\,\text{συν}^3\theta}{3} = \frac{\pi}{8}.$$

Λύση.

1. Έστω $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ με $x_1 < x_2$. Τότε:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x1^3 < 2x_2^3 \tag{3}$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5, \tag{4}$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 3 έχουμε:
$$x_1^5 + 2x_1^3 < x_2^5 + 2x_2^3 \Leftrightarrow \frac{x_1^5 + 2x_1^3}{3} < \frac{x_2^5 + 2x_2^3}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.
Για το σύνολο τιμών της f, παρατηρούμε ότι:
$$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x^3 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2x^3 \le 2 \tag{5}$$
$$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x^5 \le 1, \tag{6}$$
οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 3 έχουμε:
$$-3 \le x^5 + 2x^3 \le 3 \leftrightarrow -1 \le f(x) \le 1,$$
επομένως, $f([-1, 1]) = [-1, 1]$.

2. Η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη, επομένως είναι και αντιστρέψιμη. Δεδομένου ότι είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται επί της διχοτόμου $y = x$, επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$:
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^5 + 2x^3}{3} = x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x^5+2x^3=3x\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x^5+2x^3-3x=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x(x^4+2x^2-3)=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^4+2x^2-3=0.\end{aligned}$$

Για την εξίσωση $x^4+2x^2-3=0$ θέτουμε $y=x^2$, οπότε:

$$y^2+2y-3=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=-3.$$

Δεδομένου ότι $y=x^2\geq 0$, η $y=-3$ απορρίπτεται, επομένως έχουμε:

$$y=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Επομένως, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα:

$$A(0,f(0))=(0,0), B(1,f(1))=(1,1), C(-1,f(-1))=(-1,-1).$$

3. Η f^{-1} είναι «1-1» (εξ ορισμού), και $f^{-1}(0)=0$, αφού $f(0)=0$, οπότε η δοσμένη εξίσωση ξαναγράφεται ως εξής:

$$f^{-1}(f(x+1)-1)=f^{-1}(0)\xLeftrightarrow{f^{-1}:«1\text{-}1»} f(x+1)-1=0\Leftrightarrow f(x+1)=1.$$

Επειδή $f(1)=1$ και η f είναι «1-1», έπεται ότι $x+1=1\leftrightarrow x=0$. *Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι το 0 είναι όντως λύση της εξίσωσης.*

4. Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη σχέση γράφεται ως:

$$f(\text{συν}\,\theta)=\frac{\pi}{8}.$$

Δεδομένου ότι $\frac{\pi}{8}\in[-1,1]=f([-1,1])$, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in D_f$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{\pi}{8}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της $\text{συν}\,x$, $x\in[0,\pi]$ είναι το $[-1,1]$, επομένως, αφού $x_0\in[-1,1]$, υπάρχει κάποιο $\theta\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\text{συν}\,\theta=x_0.$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$f(\text{συν}\,\theta)=f(x_0)=\frac{\pi}{8},$$

που ήταν το ζητούμενο.

□

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση. 1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \\ \Rightarrow & -x_1 > -x_2 \\ \Rightarrow & 1 - x_1 > 1 - x_2 \\ \Rightarrow & e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & -e^{1-x_1} < -e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & 1 - e^{1-x_1} < 1 - e^{1-x_2} \\ \Rightarrow & f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για τον υπολογισμό της αντίστροφης έχουμε:

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow & 1 - e^{1-x} = y \\ \Leftrightarrow & -e^{1-x} = -1 + y \\ \Leftrightarrow & e^{1-x} = 1 - y \\ \Leftrightarrow & 1 - x = \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow & -x = -1 + \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow & x = 1 - \ln(1-y), \end{aligned}$$

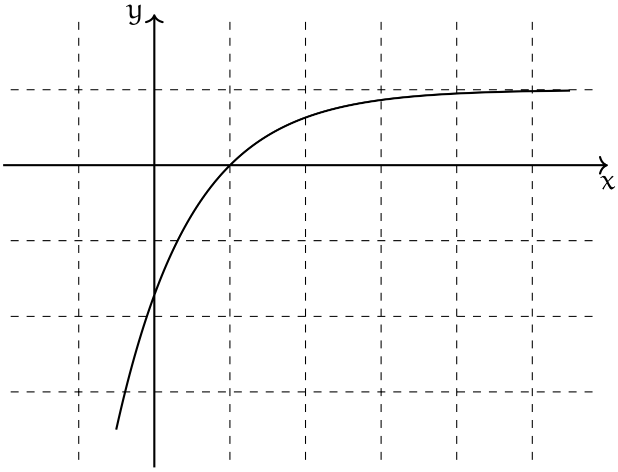
άρα $f^{-1}(x) = 1 - \ln(1-x)$.

3. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως (οι πράξεις παραλείπονται ως εύκολες):

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1).$$

4. Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της e^x, περνάμε στην e^{-x} και μετά στην e^{1-x} και μετά στην $-e^{1-x}$ και, τέλος, στην $f(x)$. Η τελική γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.

□



Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1+e)).$$

4. Να λύσετε την ανισότητα:

$$f(e^{x^2-4x+5}) - \ln e > \ln(1+e).$$

Λύση. 1. Αρχικά, πρέπει $x \geq 0$, αφού έχουμε υπόρριζη παράσταση. Έπειτα, για τον λογάριθμο απαιτούμε:

$$x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) > 0.$$

Το τελευταίο είναι γινόμενο ενός θετικού αριθμού $(\sqrt{x}+1)$ με την $\sqrt{x}$. Επομένως, αυτό που πρέπει (και αρκεί) να ισχύει είναι:

$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Τελικά:

$$D_f = (0, +\infty).$$

2. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$$

και, προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 + \sqrt{x_2} < x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + \sqrt{x_1}) < \ln(x_2 + \sqrt{x_2}) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

Σχόλιο

Μπορείτε να λύσετε αυτήν την ανισότητα με 1002 τρόπους, όπως να θέσετε κ.λπ...

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

3. Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για το $f^{-1}(\ln e + \ln(1+e))$ παρατηρούμε ότι:

$$f(e^2) = \ln(e^2 + \sqrt{e^2}) = \ln(e^2 + e) = \ln(e(e+1)) = \ln e + \ln(e+1),$$

οπότε:

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1+e)) = f^{-1}(f(e^2)) = e^2.$$

4. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f\left(e^{x^2-4x+5}\right) > \ln e + \ln(1+e) = f(e^2).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$e^{x^2-4x+5} > e^2,$$

οπότε λογαριθμίζοντας, παίρνουμε:

$$x^2 - 4x + 5 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0,$$

η οποία λύνεται κατά τα γνωστά και μας δίνει:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η ποσότητα e^{x^2-4x+5} είναι πάντα θετική (>0), άρα το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f\left(e^{x^2-4x+5}\right)$ είναι όλο το $\mathbb{R}$, οπότε δεν προκύπτει επιπλέον περιορισμός για τις λύσεις μας.

□

Θέμα 9

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = x^{2017} + x^{2019}$$

και η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y-1) > x+y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.
3. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(g \circ f)(x^2+1) > g(x^2+2).$$

Λύση. 1. Θέτουμε $y = 1$ στη δοσμένη ανισότητα, οπότε:

$$f(x+1-1) > x+1 \Leftrightarrow f(x) > x+1.$$

2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2017} < x^{2017}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2019} < x^{2019},$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x_1^{2017} + x_1^{2019} < x_2^{2017} + x_2^{2019} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

3. Ξεκινώντας από τη δοσμένη ανισότητα, θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει προχωρώντας με ισοδυναμίες (χρησιμποιούμε την μονοτονία της g):

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x^2+1) &> g(x^2+2)\\ \Leftrightarrow g(f(x^2+1)) &> g(x^2+2)\\ \Leftrightarrow f(x^2+1)) &> x^2+2.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ισχύει διότι από το πρώτο ερώτημα ισχύει $f(x) > x+1$, οπότε, για x^2 στη θέση του x προκύπτει το ζητούμενο.

□

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων