# 2η Άσκηση Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

**2022-2023**

**Έως τις συμμετρίες συναρτήσεων (Άρτια – Περιττή)**

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2|x|}{|x|^3 + x^2}$, $x \in A$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $A = \mathbb{R}^*$.

**β)** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{2}{|x|}$, $x \neq 0$.

**γ)** Να γράψετε την f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

**δ)** Με την βοήθεια της μονοτονίας να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^{10} + x^8\right) > 1$ στο $(0, +\infty)$.

**ε)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

**στ)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

**ζ)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \geq 2 \\ g(x), & x \in (-2,0) \cup (0,2) \end{cases}$ είναι άρτια ή περιττή.

**Νίκος Τούντας**

# Λύση

**α)** Για να ορίζεται η $f(x)=\dfrac{2x^2+2|x|}{|x|^3+x^2}$, $x\in A$ πρέπει $|x|^3+x^2\neq 0$.

**1ος τρόπος:** Είναι $|x|\geq 0\Leftrightarrow |x|^3\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.
Είναι $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Άρα είναι $|x|^3+x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Άρα πρέπει $x\neq 0$ και επομένως έχουμε $A=\mathbb{R}^*$.

**2ος τρόπος:** $|x|^3+x^2\neq 0\Leftrightarrow |x|^3+|x|^2\neq 0\Leftrightarrow |x|^2\left(|x|+1\right)\neq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(|x|^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\right)$ και $\left(|x|+1\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq -1 \text{ ισχύει}\right)\Leftrightarrow x\neq 0$ επομένως έχουμε $A=\mathbb{R}^*$.

**β)** Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{2x^2+2|x|}{|x|^3+x^2}=\dfrac{2|x|^2+2|x|}{|x|^3+|x|^2}=\dfrac{2\cancel{|x|}\,\cancel{\left(|x|+1\right)}}{|x|^{\cancel{2}}\,\cancel{\left(|x|+1\right)}}=\dfrac{2}{|x|}$

**γ)** $f(x)=\dfrac{2}{|x|}=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, & x<0\\ \dfrac{2}{x}, & x>0\end{cases}$

Για κάθε $x_1<x_2<0$ είναι $\dfrac{2}{x_1}>\dfrac{2}{x_1}\Rightarrow -\dfrac{2}{x_1}<-\dfrac{2}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\nearrow(-\infty,0)$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $\dfrac{2}{x_1}>\dfrac{2}{x_1}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα $f\searrow(0,+\infty)$.

**δ)** Για κάθε $x>0$ είναι $x^{10}>0$ και $x^8>0$ άρα $x^{10}+x^8>0$.

Είναι $f\left(x^{10}+x^8\right)>1\Leftrightarrow f\left(x^{10}+x^8\right)>f(2)\overset{f\searrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}x^{10}+x^8<2\Leftrightarrow x^{10}+x^8-2<0\quad(1)$

Έστω η συνάρτηση $k(x)=x^{10}+x^8-2$, $x>0$

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $\begin{cases}{x_1}^{10}<{x_2}^{10}\\ {x_1}^{8}<{x_2}^{8}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}{x_1}^{10}+{x_1}^{8}<{x_2}^{10}+{x_2}^{8}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow {x_1}^{10}+{x_1}^{8}-2<{x_2}^{10}+{x_2}^{8}-2\Leftrightarrow k(x_1)<k(x_2)$ άρα $k\nearrow(0,+\infty)$.

Άρα η ανίσωση (1) γίνεται $k(x)<0\Leftrightarrow k(x)<k(1)\overset{k\nearrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}0<x<1$

**ε)** Για κάθε $x\neq 0$ το $-x\neq 0$ και $f(-x)=\dfrac{2}{|-x|}=\dfrac{2}{|x|}=f(x)$ άρα η f είναι άρτια.

**στ)** Για να ορίζεται η $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\frac{2}{|x|}}$ πρέπει $x\neq 0$ και $\dfrac{2}{|x|}\neq 0$ ισχύει άρα $x\neq 0$.

Άρα είναι $g(x)=\dfrac{|x|}{2}$ για κάθε $x\neq 0$.

**ζ)** Είναι $|x|\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$ άρα $h(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\geq 2 \\ g(x), & x\in(-2,0)\cup(0,2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{|x|}, & (-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ \dfrac{|x|}{2}, & x\in(-2,0)\cup(0,2) \end{cases}$$

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ το $-x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ και $h(-x)=\dfrac{2}{|-x|}=\dfrac{2}{|x|}=h(x)$

Για κάθε $x\in(-2,0)\cup(0,2)$ το $-x\in(-2,0)\cup(0,2)$ και $h(-x)=\dfrac{2}{|-x|}=\dfrac{2}{|x|}=h(x)$

Άρα για κάθε $x\neq 0$ το $-x\neq 0$ και $h(-x)=h(x)$, επομένως η h είναι άρτια.