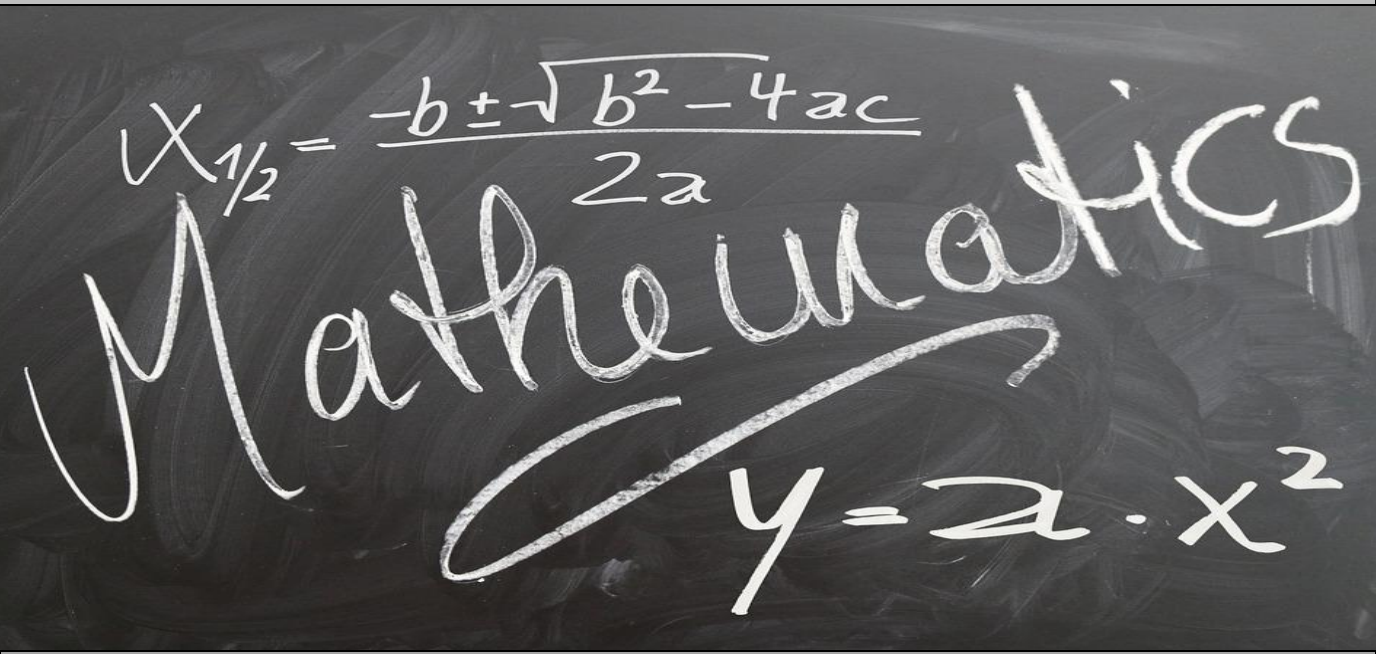
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ


## ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr


**ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:**

**-Θετικών σπουδών**

**-Οικονομίας και Πληροφορικής**

**2019-2020**

# ΑΣΚΗΣΗ 6. (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ / Αναφορά στη τριγωνομετρία και τις περιοδικές συναρτήσεις) ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

**6).** Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^{x+y}) = f(2x+y) - f(y)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

Για την f ισχύει επίσης $f(4x) = 1 - 2\cdot ημ2χ(ημ2χ - 4χ\cdot συν2χ)$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Δίνονται οι τύποι: $ημ2χ = 2ημχσυνχ$, $συν2χ = 2συν^2χ - 1$

β) Με την βοήθεια των παραπάνω τύπων να δείξετε ότι $f(x) = συνχ + χ\cdot ημχ$, $\chi \in \mathbb{R}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + χ - 1 = (χ-1)(ημχ+1)$ για κάθε $\chi \in [0,2\pi]$.

ε) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 1 - (x-1)(ημχ+1)$, $\chi \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδο της.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = y$ με $y \in \{-1, 0, 1\}$ έχει άπειρες λύσεις για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

## ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ

**α)** Για $χ = y = 0$: $f(1) = 0$ για $y = -χ$: $f(1) = f(x) - f(-x) \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$ άρα η f είναι άρτια άρα η f δεν είναι 1-1.

**ΣΧΟΛΙΟ: Πρέπει να θυμόμαστε ότι αν μια συνάρτηση είναι άρτια τότε δεν είναι 1-1. Επίσης θα μπορούσαμε εύκολα να δείξουμε ότι $f(1) = f(-1)$ αν δεν σκεφτόμασταν ότι είναι άρτια.**

**β)** ΘΕΤΩ $4x = u$ : $f(u) = 1 - 2ημ\frac{u}{2}\left(ημ\frac{u}{2} - u\cdot συν\frac{u}{2}\right) = 1 - 2ημ^2\frac{u}{2} + 2u\cdot ημ\frac{u}{2}\cdot συν\frac{u}{2} =$

$$= 2συν^2\frac{u}{2} - 1 + u\cdot ημu = συνu + u\cdot ημu$$

Για u το χ: $f(x) = συνx + x\cdot ημx$.

**γ)** $\lim_{\chi\to 0}((x^3+x^2)\, f(\frac{1}{x})) = \lim\limits_{\chi\to 0}((x^3+x^2)συν\frac{1}{\chi} + (\chi^2+x)ημ\frac{1}{\chi}) = l$

$$\left|(x^3+x^2)συν\frac{1}{\chi}\right| \le |x^3+x^2| \Rightarrow -|x^3+x^2| \le (x^2+\chi)συν\frac{1}{\chi} \le |x^3+x^2|$$

Από κριτήριο παρεμβολής υπολογίζοντας εύκολα τα πλαϊνά όρια ισχύει

$$\lim_{\chi\to 0}\left((x^3+x^2)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi}\right)=0$$

Ομοίως με τον ίδιο τρόπο και για το $(\chi^2+x)\eta\mu\frac{1}{\chi}$ και τελικά ισχύει $l=0+0=0$.

**δ)** $f(x)+x-1=(x-1)(\eta\mu\chi+1)\Leftrightarrow\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+x\cdot\eta\mu x+\chi-1=\chi\eta\mu\chi-\eta\mu\chi+\chi-1\Leftrightarrow$ $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=0\Leftrightarrow\eta\mu\chi=-\sigma\upsilon\nu\chi\overset{\sigma\upsilon\nu\chi\neq 0}{\Longleftrightarrow}\varepsilon\varphi\chi=-1\Leftrightarrow\chi=\frac{3\pi}{4}$ ή $\frac{7\pi}{4}$

Γιατί $\chi\epsilon[0,2\pi]$ και $\varepsilon\varphi\chi\geq 0$ στο $1^{o}$ και στο $3^{o}$ τεταρτημόριο άρα οι λύσεις βρίσκονται εκεί. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\chi\neq 0$ γιατί έστω ότι $\sigma\upsilon\nu\chi=0$ τότε και $\eta\mu\chi=0$ ΑΤΟΠΟ γιατί $\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$.

**ε)** Ομοίως καταλήγουμε $g(x)=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi\,,\chi\in\mathbb{R}$ .

Για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ το $\chi+2\pi,\chi-2\pi\in\mathbb{R}$ και $f(x+2\pi)=f(x-2\pi)=f(x)$

άρα η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

| **ΣΧΟΛΙΟ: Πρέπει να θυμόμαστε πότε μία συνάρτηση είναι περιοδική**. |
|---|

**στ)** Αν $y=0$ από δ ερώτημα έχει 2 ρίζες στο $[0,2\pi]$ άρα έχει 2 ρίζες ανά διάστημα 2π άρα έχει άπειρες ρίζες.

Αν $y=-1$ το Π είναι προφανής ρίζα άρα ομοίως έχει άπειρες ρίζες.

Αν $y=1$ το 0 είναι προφανής ρίζα άρα έχει ομοίως άπειρες ρίζες.

| **ΣΧΟΛΙΟ: Θα μπορούσε να λυθεί και λύνοντας τις τριγωνομετρικές εξισώσεις.** |
|---|