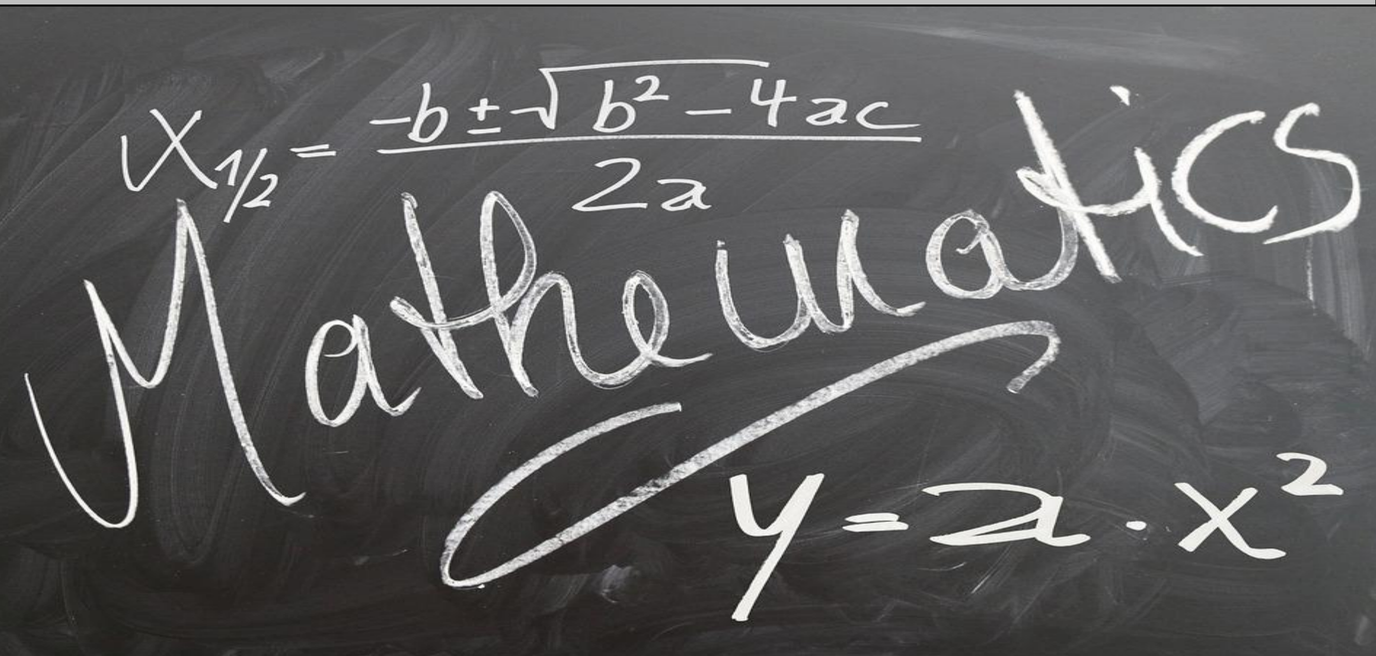
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

ΑΣΚΗΣΗ 9. (Έως τις συνέπειες του θεωρήματος Bolzano) Νίκος Τούντας

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

-$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) + 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

-$g(x1) + 3g(x2) + 5g(x3) = 0$ με $\chi 1 < \chi 2 < \chi 3 < 1$.

-Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(10) = 100$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν f είναι συνεχής στο $xo = 2020$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho 1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\rho 1) = 0$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi 1 \in [x1, x3]$ τέτοιο ώστε $g(\xi 1) = -\frac{g(x2)}{8}$ και να αναφέρεται αν το ξ1 μπορεί να είναι ρίζα της g δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Αν ρ2 είναι μοναδική ρίζα της f με $\rho 2 \in (-\infty, 1)$ και $f(10) = 1009$ τότε:

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi 2, \xi 3 \in [1{,}2020]$ τέτοια ώστε:

$$f(\xi 2) = \frac{f(1) + 2f(2) + \cdots + 2019f(2019) + 2020f(2020)}{1 + 2 + \cdots + 2019 + 2020}$$

$$f(\xi 3) = \sqrt[2020]{f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2019) \cdot f(2020)}$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΕ ΣΧΟΛΙΑ

α) Για $x = y = 0$: $f(0) = f(0) + f(0) + 1 \Leftrightarrow f(0) = -1$

Για $y = -x$: $f(0) = f(x) + f(-x) + 1 \Leftrightarrow -1 = f(x) + f(-x) + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(-x) = -2$$

β) Η f είναι συνεχής στο 2020 άρα $\lim\limits_{\chi\to 2020} f(x) = f(2020)$ **(1)**

ΘΕΤΩ: $\mathbf{x = xo + h - 2020}$ όταν $x \to xo$ τότε $h \to 2020$

Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{\chi\to xo} f(x) = f(xo)$ για οποιοδήποτε χο ∈ $\mathbb{R}$.

$$\lim_{\chi\to xo} f(x) = \lim_{h\to 2020} f(xo + h - 2020) = (\textbf{Από αρχική σχέση}) =$$

$$= \lim_{h\to 2020} (f(xo) + f(h - 2020) + 3xo(h - 2020)(xo + h - 2020) + 1) =$$

$$= \lim_{h\to 2020} f(xo) + \lim_{h\to 2020} f(h - 2020) + \lim_{h\to 2020} 3xo(h - 2020)(xo + h - 2020) + 1 =$$

$$= f(xo) + \lim_{h\to 2020} f(h - 2020) + 0 + 1 \ \ (\mathbf{2})$$

$$\lim_{h\to 2020} f(h - 2020) = (\textbf{Από αρχική σχέση}) =$$

$$= \lim_{h\to 2020} (f(h) + f(-2020) - 3h \cdot 2020(h - 2020) + 1) =$$

$$= \lim_{h\to 2020} f(h) + \lim_{h\to 2020} f(-2020) + \lim_{h\to 2020} (-3h \cdot 2020(h - 2020) + 1) =$$

$$= \lim_{h\to 2020} f(h) + f(-2020) + 0 + 1 = \lim_{h\to 2020} f(h) + f(-2020) + 1 = \big(\textbf{Από } (\mathbf{1})\big) =$$

$$= f(2020) + f(-2020) + 1 = (\textbf{Από α ερώτημα}) = -2 + 1 = -1$$

Άρα η σχέση (2) γίνεται: $(\mathbf{2}) = \mathbf{f(xo) - 1 + 1 = f(xo)}$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to xo} \mathbf{f(x) = f(xo)}$ **για οποιοδήποτε χο** ∈ $\mathbb{R}$. **Άρα η f είναι συνεχής στο** $\mathbb{R}$.

γ) Έστω ότι η g δεν έχει ρίζα τότε αφού είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο σε όλο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(10) = 100 > 0$ τότε $g(x) > 0$ για κάθε χ ∈ $\mathbb{R}$.

Άρα $g(x1) > 0$ και $g(x2) > 0$ και $g(x3) > 0$ επομένως:

$g(x1) + 3g(x2) + 5g(x3) > 0$ **ΑΤΟΠΟ** από εκφώνηση.

Άρα η g έχει ρίζα οπότε υπάρχει $\mathbf{\rho 1} \in \mathbb{R}$ **τέτοιο ώστε** $\mathbf{g(\rho 1) = 0}$.

δ) $\mathrm{g(x1)+3g(x2)+5g(x3)=0 \Leftrightarrow -g(x2)=g(x1)+2g(x2)+5g(x3)}$ **(3)**

Από ΘΜΕΤ η g θα έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\chi1,\chi3] \subseteq \mathbb{R}$.

Από ΘΕΤ το διάστημα [m,M] είναι το σύνολο τιμών της f στο [χ1,χ3]. Άρα:

$\mathrm{m \le g(x1) \le M}$, $\mathrm{2m \le g(x2) \le 2M}$, $\mathrm{5m \le g(x3) \le 5M}$ προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\mathrm{8m \le g(x1)+2g(x2)+5g(x3) \le 8M} \Leftrightarrow \left(\text{Από } (3)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{8m \le -g(x2) \le 8M \Leftrightarrow m \le -\frac{g(x2)}{8} \le M}$$

Άρα υπάρχει ξ1 $\in [\mathbf{x1},\mathbf{x3}]$ **τέτοιο ώστε** $\mathbf{g(\xi1)=-\frac{g(x2)}{8}}$**.**

Τώρα επειδή $\mathbf{g(x1)+3g(x2)+5g(x3)=0}$ τότε συμπεραίνουμε ότι:

1η Περίπτωση: 1 ή 2 από τους αριθμούς $\mathrm{g(x1), 3g(x2), 5g(x3)}$ θα είναι αρνητικός και 1 ή 2 από αυτούς θα είναι θετικός.

2η Περίπτωση: Κάποιος από αυτούς ισούται με μηδέν και οι υπόλοιποι 2 είναι αντίθετοι.

3η Περίπτωση: Και οι 3 ισούνται με μηδέν.

Άρα επειδή η g είναι συνεχής από την 1η περίπτωση αφού παίρνει μια θετική και μία αρνητική τιμή τότε από ΘΕΤ παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές άρα και το μηδέν. Από την 2η και την 3η περίπτωση παίρνει την τιμή μηδέν. Άρα λαμβάνοντας υπόψιν και τις 3 περιπτώσεις εύκολα συμπεραίνουμε το ζητούμενο του **ερωτήματος γ** και μάλιστα προκύπτει ότι συγκεκριμένα η $\rho1 \in [\chi1,\chi3] \subseteq \mathbb{R}$.

Άρα αν το χ2 είναι η ριζά ρ1 τότε αφού $\mathbf{g(\xi1)=-\frac{g(x2)}{8}=0}$ **τότε το ξ1 είναι ρίζα της g.**

ΣΧΟΛΙΟ: Με τον τρόπο που δείξαμε ότι το ξ1 μπορεί να είναι ρίζα της g θα μπορούσα να είχαμε απαντήσει κατευθείαν το ερώτημα γ. Όμως επειδή στο γ δεν ζήταγε να αποδείξουμε ότι το ρ1 θα ανήκει στο [χ1,χ3] τότε με μία απλή διατήρηση προσήμου έχουμε τελειώσει.

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει μοναδική ρίζα ρ2 τότε θα διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας ρ2 δηλαδή στα διαστήματα $(-\infty, \rho2), (\rho2, +\infty)$. Επειδή η ρ2 είναι μικρότερη του 1 τότε θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[1{,}2020] \subseteq (\rho2, +\infty)$ και επειδή $f(10) = 1009 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1{,}2020]$.

Από ΘΜΕΤ η f στο [1,2020] παίρνει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Από ΘΕΤ η f έχει σύνολο τιμών το [m,M] στο διάστημα [1,2020]. Άρα:

$$m \le f(1) \le M$$

$$2m \le 2f(2) \le 2M$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$2019m \le 2019f(2019) \le 2019M$$

$$2020m \le 2020f(2019) \le 2020M$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$m \le \frac{f(1) + 2f(2) + \cdots + 2019f(2019) + 2020f(2020)}{1 + 2 + \cdots + 2019 + 2020} \le M$$

Άρα υπάρχει $\xi2 \in [1{,}2020]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi2) = \frac{f(1) + 2f(2) + \cdots + 2019f(2019) + 2020f(2020)}{1 + 2 + \cdots + 2019 + 2020}$$

Ομοίως επειδή όλοι οι όροι όπως αποδείξαμε πριν είναι θετικοί τότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$m^{2020} \le f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2019) \cdot f(2020) \le M^{2020} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \le \sqrt[2020]{f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2019) \cdot f(2020)} \le M$$

Άρα υπάρχει ξ3 $\in [1,2020]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_3) = \sqrt[2020]{f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2019) \cdot f(2020)}$$

ΣΧΟΛΙΟ: Οι τιμές m,M είναι θετικές αφού είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο [1,2020] στο οποίο αποδείξαμε ότι η f είναι θετική.