43η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Δίνεται η ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ολικό μέγιστο το 2 και ολικό ελάχιστο το 0.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=4$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

δ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε την C_f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών $x=-2$ και $x=2$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ επομένως πρέπει $x^2+\kappa\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα πρέπει $-\kappa<0\Leftrightarrow \kappa>0$.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\kappa=\lambda=4$ με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Η f είναι συνεχής ως ρητή επομένως από ΘΕΤ θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$.

Επομένως είναι $0\leq \frac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\leq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=2$.

- Είναι $\frac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\geq 0 \overset{x^2+\kappa>0}{\Leftrightarrow} x^2-\kappa x+\lambda\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_1$
  Το τριώνυμο $x^2-\kappa x+\lambda$ έχει διακρίνουσα $\Delta_1=\kappa^2-4\lambda$.
  Πρέπει $\Delta_1=0\Leftrightarrow \kappa^2=4\lambda\ (1)$, καθώς αν $\Delta_1<0$ δεν ισχύει η ισότητα άρα δεν υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1)=0$ και αν $\Delta_1>0$ τότε θα υπάρχει διάστημα στο οποίο θα είναι $x^2-\kappa x+\lambda<0$.

- Είναι $\frac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\leq 2 \overset{x^2+\kappa>0}{\Leftrightarrow} x^2-\kappa x+\lambda\leq 2x^2+2\kappa \Leftrightarrow x^2+\kappa x+2\kappa-\lambda\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$. Το τριώνυμο $x^2+\kappa x+2\kappa-\lambda$ έχει διακρίνουσα $\Delta_2=\kappa^2-8\kappa+4\lambda$.
  Πρέπει $\Delta_2=0\Leftrightarrow \kappa^2-8\kappa+4\lambda=0\ (2)$, καθώς αν $\Delta_2<0$ δεν ισχύει η ισότητα άρα δεν υπάρχει $x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_2)=2$ και αν $\Delta_2>0$ τότε θα υπάρχει διάστημα στο οποίο θα είναι $x^2+\kappa x+2\kappa-\lambda<0$.

  Από (1),(2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases}\kappa^2=4\lambda\\ \kappa^2-8\kappa+4\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa^2=4\lambda\\ 8\lambda=8\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa^2-4\kappa=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa(\kappa-4)=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\kappa=4\\ \lambda=4\end{cases}$$

2ος τρόπος: Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}=y\Leftrightarrow x^2-\kappa x+\lambda=yx^2+y\kappa\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1-y)x^2-\kappa x+\lambda-y\kappa=0\ (1)$

Αν $y=1$ τότε η (1) γίνεται $-\kappa x+\lambda-\kappa=0\Leftrightarrow \kappa x=\lambda-\kappa \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{\lambda-\kappa}{\kappa}$

Αν $y\neq 1$ τότε επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου $(1-y)x^2-\kappa x+\lambda-y\kappa$ να είναι μη αρνητική, δηλαδή $\Delta_1\geq 0\Leftrightarrow \kappa^2-4(1-y)(\lambda-y\kappa)\geq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \kappa^2-4\lambda+4y\kappa+4y\lambda-4y^2\kappa\geq 0\Leftrightarrow 4y^2\kappa-4(\kappa+\lambda)y+4\lambda-\kappa^2\leq 0$

Το τριώνυμο $4y^2\kappa-4(\kappa+\lambda)y+4\lambda-\kappa^2$ (ως προς y) πρέπει να έχει δύο ρίζες $y_1<y_2$, γιατί αν δεν έχει ρίζες τότε $4y^2\kappa-4(\kappa+\lambda)y+4\lambda-\kappa^2>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και αν έχει μία ρίζα τότε $4y^2\kappa-4(\kappa+\lambda)y+4\lambda-\kappa^2\geq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Τότε το ελάχιστο της f θα είναι το $y_1=0$ και το μέγιστο της f το $y_2=2$.

Από τους τύπους του Vieta είναι:

$$y_1+y_2=\frac{4(\kappa+\lambda)}{4\kappa}\Leftrightarrow 2=\frac{4(\kappa+\lambda)}{4\kappa}\Leftrightarrow 4\kappa+4\lambda=8\kappa\Leftrightarrow 4\kappa=4\lambda\Leftrightarrow \kappa=\lambda$$

$$y_1y_2=\frac{4\lambda-\kappa^2}{4\kappa}\Leftrightarrow \frac{4\lambda-\kappa^2}{4\kappa}=0\Leftrightarrow \kappa^2=4\lambda \overset{\kappa=\lambda}{\Leftrightarrow} \kappa^2-4\kappa=0\Leftrightarrow \kappa(\kappa-4)=0 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa=\lambda=4$$

Άρα τελικά είναι $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4}=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}=\frac{2(x-2)(x^2+4)-2x(x-2)^2}{(x^2+4)^2}=\frac{2(x-2)\left[x^2+4-x(x-2)\right]}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{2(x-2)(\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}+2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}=\frac{4(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{4(x^2-4)}{(x^2+4)^2}\geq 0 \overset{(x^2+4)^2>0}{\Leftrightarrow} x^2\geq 4\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

Για $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και f συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$ άρα $f\nearrow(-\infty,-2]$ και $f\nearrow[2,+\infty)$.

Για $x\in(-2,2)$ είναι $f'(x)<0$ και f συνεχής στο $[-2,2]$ άρα $f\searrow[-2,2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ το $f(-2)=2$ και τοπικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f''(x)=4\frac{2x(x^2+4)^2-4x(x^2+4)(x^2-4)}{(x^2+4)^4}=\frac{8x\cancel{(x^2+4)}\left[x^2+4-2(x^2-4)\right]}{(x^2+4)^{\cancel{4}}}=$$

$$=\frac{8x\left[x^2+4-2x^2+8\right]}{(x^2+4)^3}=\frac{8x(-x^2+12)}{(x^2+4)^3}=-\frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

x	$-\infty$ $-2\sqrt{3}$		0	$2\sqrt{3}$ $+\infty$
$-8x$	+	+	-	-
x^2-12	+	-	-	+
$(x^2+4)^3$	+	+	+	+
$f''(x)$	+	-	+	-
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$
		Σ.Κ.	Σ.Κ	Σ.Κ.

Για

$x\in(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(0\,,\,2\sqrt{3})$ είναι $f''(x)>0$ και η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα

$(-\infty,-2\sqrt{3}]$, $[0\,,\,2\sqrt{3}]$ άρα η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2\sqrt{3}]$, $[0\,,\,2\sqrt{3}]$.

Για $x \in \left(-2\sqrt{3}\,,\,0\right) \cup \left(2\sqrt{3},+\infty\right)$ είναι $f''(x) < 0$ και η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-2\sqrt{3}\,,\,0\right],\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$ άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-2\sqrt{3}\,,\,0\right],\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=-2\sqrt{3}$ το $f\left(-2\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(-2\sqrt{3}-2\right)^2}{12+4}=\dfrac{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{16}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}$, για $x=0$ το $f(0)=1$ και για $x=2\sqrt{3}$ το $f\left(2\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2}{12+4}=\dfrac{4\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{16}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}$

γ) Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες η C_f.

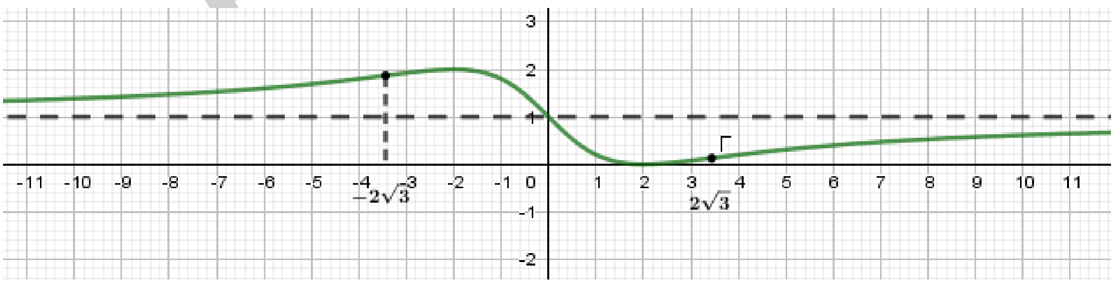
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την ευθεία $y=1$ και δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ και $f(0)=1$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο $K(2,0)$ και τον άξονα y΄y στο $\Lambda(0,1)$.

δ)

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+		-		-		+		+		-	
$f'(x)$		+		+		-		-		+		+	
f	1		$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}$		2		1		0		$\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}$		1



ε) $E=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4}dx=\int_{-2}^{2}\left(1-\dfrac{4x}{x^2+4}\right)dx=\left[x-2\ln\left|x^2+4\right|\right]_{-2}^{2}=4$