12η Άσκηση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου

2022-2023

Γενική άσκηση στις παραγώγους (Κεφάλαια 1 και 2)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2$ και $f(e)=\frac{1}{e}$ για την οποία ισχύει

$x^2 f^2(x)-\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3},\ x>0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για κάθε

$\sqrt{e^3}<\alpha<\beta$ ισχύει $\frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2}<\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}<\frac{1-\ln\beta}{\beta^2}$.

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\gamma^{\gamma+1}$ και $(\gamma+1)^{\gamma}$ με $\gamma>0$.

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $e\le\lambda<2e$ και $x>0$ είναι $e^x>x^{\lambda-e}$.

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^x=x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) $x^2f^2(x)-\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=\frac{(-\ln x)^2}{x^2} \Leftrightarrow f^2(x)=\frac{\ln^2 x}{x^2} \Leftrightarrow |f(x)|=\left|\frac{\ln x}{x}\right|$ (1)

$|f(x)|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{\ln x}{x}\right|=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2<0$ άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η (1) γίνεται:

$-f(x)=-\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Είναι $f(e)=\frac{1}{e}>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Για $x=1: f(1)=\ln 1=0$ άρα είναι $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & 0<x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$ και έχουμε $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq e$. Η f είναι συνεχής στο e άρα έχουμε για $x\in(0,e): f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(0,e]$ και επίσης έχουμε ότι για $x\in(e,+\infty): f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[e,+\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = e το $f(e)=\frac{1}{e}$.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}, x>0 \text{ και έχουμε ότι:}$$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x-3\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow x\geq\sqrt{e^3}$$

Αφού η f' είναι συνεχής στο $x=\sqrt{e^3}$ τότε για $x>\sqrt{e^3} \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f'\nearrow\left[\sqrt{e^3},+\infty\right)$.

Εφαρμόζουμε στο διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq\left[\sqrt{e^3},+\infty\right)$ το ΘΜΤ για την συνάρτηση f και έχουμε ότι υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{\ln\beta}{\beta}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}$

Για $\sqrt{e^3}<\alpha<\xi<\beta \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2}<\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}<\frac{1-\ln\beta}{\beta^2}$

δ) Αν $\gamma\in(0,e)$ έχουμε:

$$\gamma<\gamma+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\gamma)<f(\gamma+1) \Leftrightarrow \frac{\ln\gamma}{\gamma}<\frac{\ln(\gamma+1)}{\gamma+1} \Leftrightarrow (\gamma+1)\ln\gamma<\gamma\ln(\gamma+1) \Leftrightarrow \gamma^{\gamma+1}<(\gamma+1)^{\gamma}$$

Αν $\gamma\in(e,+\infty)$ έχουμε:

$$\gamma<\gamma+1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\gamma)>f(\gamma+1) \Leftrightarrow \frac{\ln\gamma}{\gamma}>\frac{\ln(\gamma+1)}{\gamma+1} \Leftrightarrow (\gamma+1)\ln\gamma>\gamma\ln(\gamma+1) \Leftrightarrow \gamma^{\gamma+1}>(\gamma+1)^{\gamma}$$

Αν γ = e, τότε επειδή η f έχει μέγιστο στο x = e, είναι

$$f(e+1)<f(e)\Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e+1}<\frac{\ln e}{e}\Leftrightarrow e\ln(e+1)<(e+1)\ln e\Leftrightarrow \ln(e+1)^e<\ln e^{(e+1)}\Leftrightarrow (e+1)^e<e^{(e+1)}$$

ε) Είναι $e^x>x^{\lambda-e}\Leftrightarrow x>(\lambda-e)\ln x$ (1)

Είναι $e\le\lambda<2e\Leftrightarrow 0<\lambda-e\le e$

Αν $\lambda=e$ τότε η (1) ισχύει αφού $x>0$.

Αν $e<\lambda<2e$ τότε η (1) γίνεται $\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\lambda-e}\Leftrightarrow f(x)<\frac{1}{\lambda-e}$ (2)

Η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{e}$ άρα για να ισχύει η (2) πρέπει $\frac{1}{e}<\frac{1}{\lambda-e}\Leftrightarrow e>\lambda-e\Leftrightarrow\lambda<2e$ ισχύει.

στ) $\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^x=x\Leftrightarrow \nu^x=x^\nu\Leftrightarrow \ln\nu^x=\ln x^\nu\Leftrightarrow x\ln\nu=\nu\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln\nu}{\nu}\Leftrightarrow f(x)=f(\nu)$.

Αν ν = 2 τότε η εξίσωση έχει μοναδική και προφανή ρίζα στο $(0,e]$ την $x=2$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $f(e)=\frac{1}{e}$.

Στο διάστημα $[e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f([e,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(0,\frac{1}{e}\right]$$

Θα εξετάσουμε αν το $\frac{\ln 2}{2}\in f([e,+\infty))$: Είναι $2<e\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(2)<f(e)\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{e}$ και επειδή επίσης $\frac{\ln 2}{2}>0$ υπάρχει $\rho\in f([e,+\infty)):g(\rho)=\frac{\ln 2}{2}$ άρα στο διάστημα $[e,+\infty)$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.

Αν $\nu>2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική και προφανή ρίζα στο $[e,+\infty)$ την $x=\nu$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty$, $f(e)=\frac{1}{e}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ τότε έχουμε: $f((0,e])=(-\infty,e]$.

Θα εξετάσουμε αν το $\frac{\ln\nu}{\nu}\in f((0,e])$: Είναι $\nu>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\nu)<f(e)\Leftrightarrow f(\nu)<\frac{1}{e}$ άρα υπάρχει $\rho\in f((0,e]):f(\rho)=\frac{\ln\nu}{\nu}$ άρα στο διάστημα $(0,e]$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.