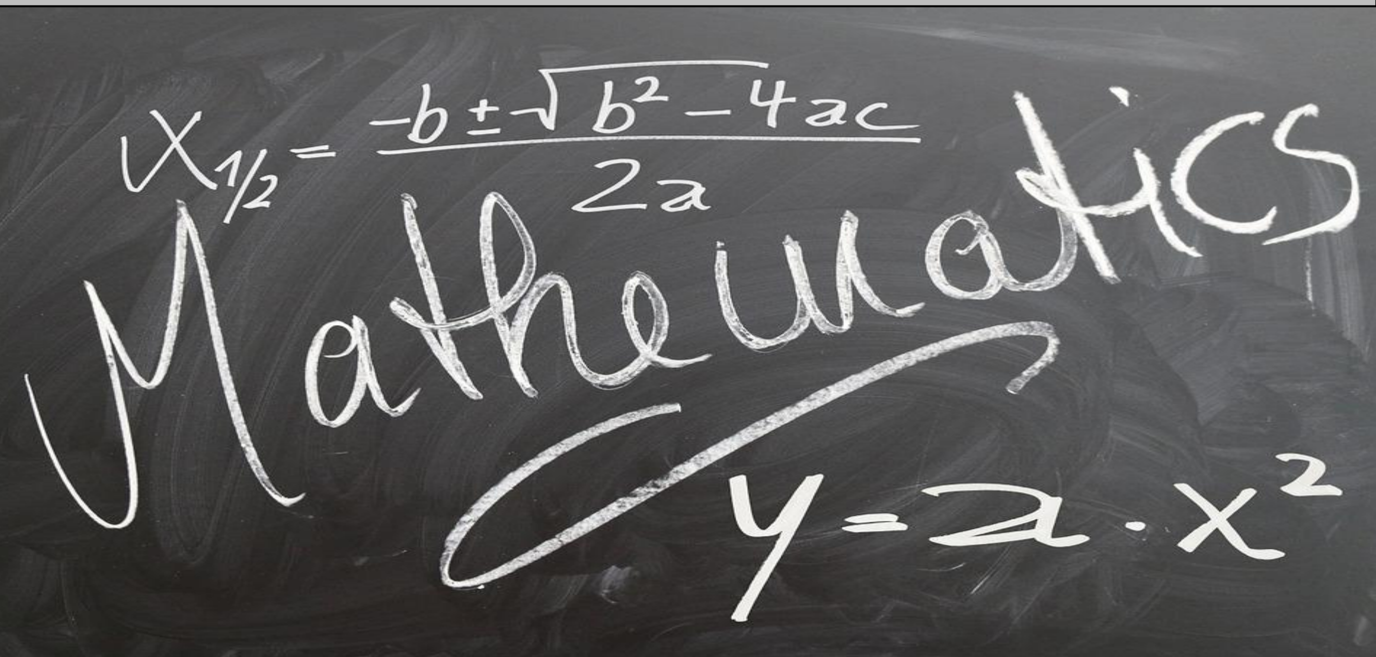
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Επαναληπτική άσκηση έως και την εφαπτομένη γραφικής παράστασης βασισμένη από ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$ημ^2x - x^4 \le xf(x) \le ημ^2x + x^4 \text{ , για κάθε } x \in (-\infty, \pi) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x-1} = 2 \text{ σε περιοχή κοντά στο } +\infty.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf στο σημείο $A(0, f(0))$.

δ) Αν τελικά $f(x) = \begin{cases} ημx\,, x < \pi \\ g(x), x \ge \pi \end{cases}$ να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι πολυώνυμικη τότε είναι της μορφής $g(x) = αx + β\,, x \in \mathbb{R}$.

ε) Να βρείτε τις τιμές των $α, β \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $xo = \pi$.

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = x^2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να γίνει αντιπροσωπευτικό σχήμα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) Επειδή f συνεχής στο μηδέν θα ισχύει: $\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^+}f(x) = f(0)$ άρα αρκεί να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0^-}f(x)$ ή το $\lim_{x\to0^+}f(x)$.

Για $x > 0$: $\frac{ημx}{x}ημx - x^3 \le f(x) \le \frac{ημx}{x}ημx + x^3$ και από κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim_{x\to0^+}f(x) = 0$

Άρα $f(0) = 0$

β) Για $x \ne 0$: Επειδή $x^2 \ge 0$ τότε $\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2$ και από κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 1$.

γ) Για $x \ne 0$: Επειδή $x^2 \ge 0$ τότε $\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2 \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2$ και από κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

Άρα για την εφαπτομένη ισχύει: $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x-1} = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x-1} = -1$ και για να βρούμε τον βαθμό του πολυωνύμου έχουμε:

Αν η g βαθμού μεγαλύτερου του 1ου τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x-1} = -1 \Leftrightarrow +\infty = -1$ ΑΤΟΠΟ

Αν η g βαθμού μικρότερου του 1ου δηλαδή το μηδενικό πολυώνυμο τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x-1} = -1 \Leftrightarrow 0 = -1$ Ομοίως ΑΤΟΠΟ

Άρα η g είναι 1ου βαθμού άρα είναι της μορφής $g(x) = \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , x < \pi \\ \alpha x + \beta, & x \ge \pi \end{cases}$$

ε) Αρχικά πρέπει η f να είναι συνεχής στο π. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\eta\mu x = 0$ και

$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+}\alpha x + \beta = \alpha\pi + \beta$ δηλαδή πρέπει $\alpha\pi + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha\pi$

Για $x < \pi$: $\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \frac{\eta\mu x - 0}{x-\pi}$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu x-0}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu(\pi-x)}{-(\pi-x)} = -1$ με αλλαγή μεταβλητής το αποδεικνύουμε.

Για $x > \pi$: $\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \frac{\alpha x - \alpha\pi}{x-\pi} = \alpha$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\alpha = \alpha$

Για να είναι παραγωγίσιμη στο π πρέπει: $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} \Leftrightarrow \alpha = -1$ άρα $\beta = \pi$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , x < \pi \\ -x + \pi, & x \ge \pi \end{cases}$$

στ) Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ άρα για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): f'(x) = x^2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = x^2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - x^2 = 0$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = \sigma\upsilon\nu x - x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η k είναι συνεχής και $k(0) = 1 > 0$ και $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η k έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x1, x2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x1 < x2 \Rightarrow \left(\sigma\upsilon\nu x \searrow \sigma\tau o \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x1 > \sigma\upsilon\nu x2$

$x1 < x2 \Rightarrow x1^2 < x2^2 \Rightarrow -x1^2 > -x2^2$ Άρα προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $k(x1) > k(x2)$ άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα η k έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα και η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για το σχήμα θα σχεδιάσουμε ξεχωριστά τις συναρτήσεις συνx και x^2 στο ζητούμενο διάστημα και βλέπουμε ότι τέμνονται σε μοναδικό σημείο.