# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

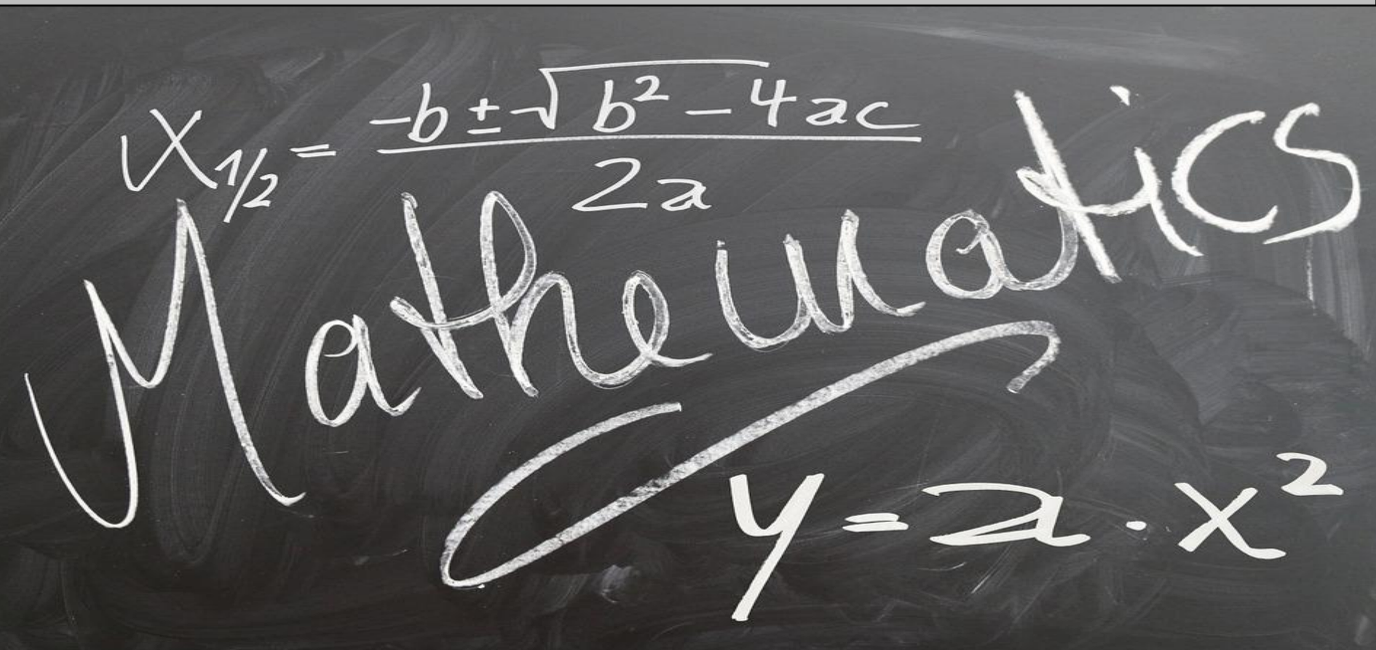
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ**

**www.askisopolis.gr**

## Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ




**ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:**

**-Θετικών σπουδών**

**-Οικονομίας και Πληροφορικής**

**2019-2020**

# ΑΣΚΗΣΗ 8. (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΑΠΟ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΣΕΛΙΔΕΣ 80-81)

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^4 + \beta\chi - 11 & ,\chi < 1 \\ \frac{\chi-\beta}{\sqrt{\chi}-\beta} + \alpha\chi + \beta & ,\chi \geq 1 \end{cases}$$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 4$ ή $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν $\alpha = -3$ και $\beta = 4$ τότε:

β) Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

γ) Να βρείτε δύο αριθμούς γ,δ ακέραιους και μικρότερους του 1 τέτοιους ώστε στα διαστήματα $(\gamma, \gamma+1)$ και $(\delta, \delta+1)$ η εξίσωση $3\left(\frac{\chi}{3}(9\chi^3+4) - \frac{11}{3}\right) = 0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

δ) Αν ρ1,ρ2 οι ρίζες στα διαστήματα $(\gamma, \gamma+1)$ και $(\delta, \delta+1)$ αντίστοιχα και ρ1,ρ2 μοναδικές ρίζες στα διαστήματα αυτά, να αναφέρετε αν η ρ1 βρίσκεται πιο κοντά στο γ ή στο γ+1 και η ρ2 πιο κοντά στο δ ή στο δ+1.

ε) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακέραιες ρίζες για $\chi < 1$.

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

**α)** $\lim\limits_{\chi\to1^+} f(x) = \alpha + \beta + 1 = f(1) \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$

$\lim_{\chi\to1^-} f(x) = \alpha^2 + \beta - 11 = \alpha + \beta + 1 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 12 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$ ή $\alpha = 4$

**Αν $\boldsymbol{\alpha = -3}$ τότε $\boldsymbol{\beta = 4}$ αν $\boldsymbol{\alpha = 4}$ τότε $\boldsymbol{\beta = -3}$ .**

**β)** $f(x) = \begin{cases} 9x^4 + 4x - 11, x < 1 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-4} - 3x + 5, x \geq 1 \end{cases}$ αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η f συνεχής και στο $[1,2]$.

$f(1) = 2 > 0$ ΚΑΙ

$f(2) = \frac{-2}{\sqrt{2}-4} - 1 < 0$ γιατί $\sqrt{2} < 4$ και $\sqrt{2} - 4 < -2$ αφού $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ άρα $\frac{-2}{\sqrt{2}-4} < 1$.

**Άρα $\mathbf{f(1) \cdot f(2) < 0}$ από θεώρημα Bolzano η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).**

**γ)** $3\left(\frac{\chi}{3}(9\chi^3+4)-\frac{11}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow f(x)=0$

Αν $\gamma=-2$ τότε $(\gamma,\gamma+1)=(-2,-1)$ . Η f είναι συνεχής στο $[-2,-1]$.

$$f(-2)=125>0 \; \kappa\alpha\iota \; f(-1)=-6<0$$

**άρα $\mathbf{f(-1)\cdot f(-2)<0}$ και από θεώρημα Bolzano η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\boldsymbol{(\gamma,\gamma+1)=(-2,-1)}$.**

**Ομοίως αν $\boldsymbol{\delta=0}$ και $\boldsymbol{(\delta,\delta+1)=(0,1)}$ με Bolzano αλλά με την χρήση του ορίου για τιμή κοντά στο 1 αφού αυτός ο κλάδος της συνάρτησης δεν ορίζεται στο 1 αποδεικνύεται εύκολα ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\boldsymbol{(\delta,\delta+1)=(0,1)}$.**

**δ)** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ και $[-\frac{1}{2},-1]$ και βλέπουμε ότι υπάρχει ρίζα στο $(-\frac{1}{2},-1)\subseteq(\gamma,\gamma+1)=(-2,-1)$ και αφού ρ1 είναι μοναδική ρίζα σε αυτό το διάστημα τότε **το ρ1 βρίσκεται πιο κοντά στο $\boldsymbol{\gamma+1=-1}$.**

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και $[\frac{1}{2},1]$ αλλά με την χρήση του ορίου για τιμή κοντά στο 1 αφού αυτός ο κλάδος της συνάρτησης δεν ορίζεται στο 1 και βλέπουμε ότι υπάρχει ρίζα στο $(\frac{1}{2},1)\subseteq(\delta,\delta+1)=(0,1)$ και αφού ρ2 μοναδική ρίζα σε αυτό το διάστημα τότε **το ρ2 βρίσκεται πιο κοντά στο $\boldsymbol{\delta+1=1}$.**

**ε)** Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της f σε αυτά τα διαστήματα είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου αφού η f είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού. Άρα οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι $\Pi.A.P.:\pm1,\pm11$ . Το 1 και το 11 απορρίπτονται καθώς πρέπει $\chi<1$. Υπολογίζοντας τις τιμές της f στα $-1,-11$ βρίσκουμε ότι καμία δεν ισούται με μηδέν άρα η f στα διαστήματα αυτά δεν έχει ακέραιες ρίζες.

**ΣΧΟΛΙΟ: Οι ρίζες ρ1,ρ2 προφανώς δεν είναι ακέραιες καθώς $\boldsymbol{\rho1\in(-\frac{1}{2},-1)}$ και $\boldsymbol{\rho2\in(\frac{1}{2},1)}$.**