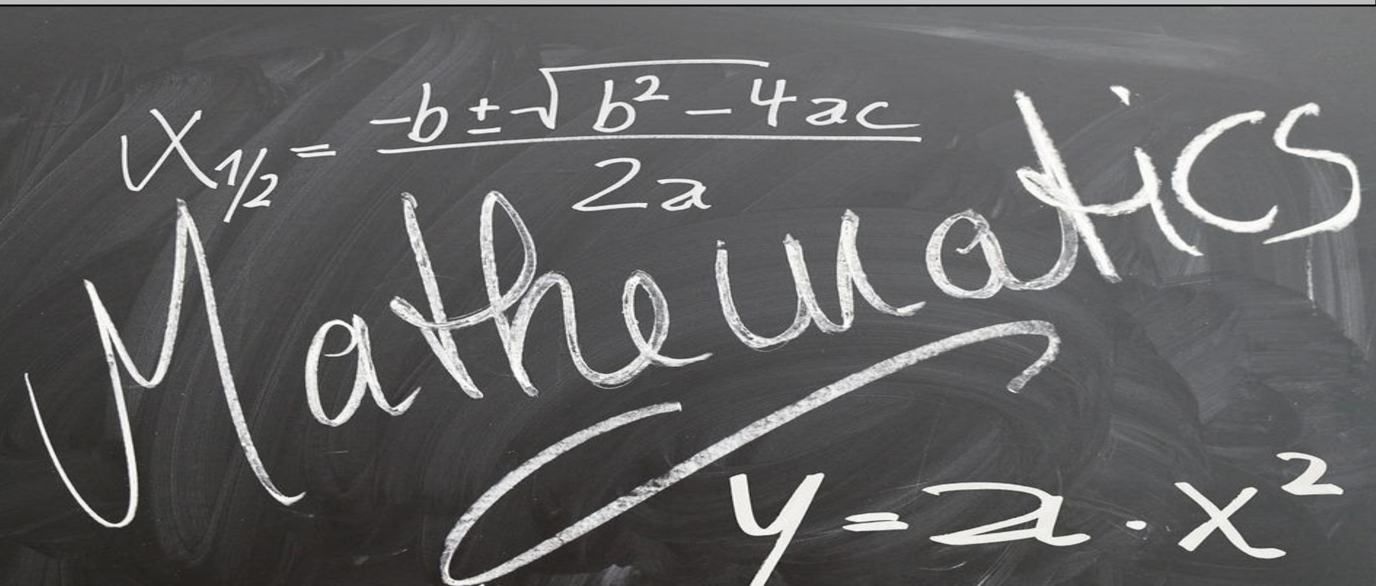
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

ΑΣΚΗΣΗ 13. (Με βάση το σχολικό βιβλίο/ Έως τα θεωρήματα συνέχειας)

Νίκος Τούντας

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f συνεχή συνάρτηση τέτοιες ώστε:

-$f^2(x) = x^2 + 4\eta\mu x(f(x) - \eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

-$g(x) = \alpha(x-\mu)(\chi-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με $\lambda < \mu < \nu$.

α) Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της f.

Διαλέγοντας για την f τον τύπο $f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in \mathbb{R}$ τότε:

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να δείξετε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (λ,μ) και τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (μ,ν) η εξίσωση: $\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} - 2x - 2\eta\mu 2x = 0$

δ) Να βρείτε τον τύπο της g αν $g(1) = 10\,, g(0) = 5$ και $g(2) = g(-2)$.

ε) Αν $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ τότε:

I) Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της Cf στα οποία η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ Cf και Cg είναι μέγιστη και ελάχιστη αντίστοιχα.

II) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x1, x2 \in [-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε $g(x) - g(x1) \le f(x) - f(x1)$ και $g(x) - g(x2) \ge f(x) - f(x2)$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) $f^2(x) = x^2 + 4\eta\mu x(f(x) - \eta\mu x) \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 4\eta\mu x f(x) - 4\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 4\eta\mu x f(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow (f(x) - 2\eta\mu x)^2 = x^2 \Leftrightarrow |f(x) - 2\eta\mu x| = |x|$$

ΘΕΤΩ $\mathbf{v(x) = f(x) - 2\eta\mu x\,,\, x \in \mathbb{R}}$

$$\nu(x) = 0 \Leftrightarrow |\nu(x)| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η ν είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα θα διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας της δηλαδή του μηδέν. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν $\nu(\chi) > 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $\nu(\chi) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ τότε:

$$f(x) - 2\eta\mu x = -x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x - x\,, x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) - 2\eta\mu x = x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in (0, +\infty)$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x - x\,, x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + x\,, x \in (0, +\infty) \end{cases}$

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν $\nu(\chi) < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $\nu(\chi) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$ τότε:

$$-f(x) + 2\eta\mu x = -x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in (-\infty, 0)$$

$$-f(x) + 2\eta\mu x = x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x - x\,, x \in (0, +\infty)$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x + x\,, x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x - x\,, x \in (0, +\infty) \end{cases}$

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν $\nu(\chi) > 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $\nu(\chi) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$ τότε:

$$f(x) - 2\eta\mu x = -x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x - x\,, x \in (-\infty, 0)$$

$$-f(x) + 2\eta\mu x = x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x - x\,, x \in (0, +\infty)$$

Άρα $f(x) = 2\eta\mu x - x\,, x \in \mathbb{R}$

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\nu(\chi) < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $\nu(\chi) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ τότε:

$$-f(x) + 2\eta\mu x = -x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) - 2\eta\mu x = x \Leftrightarrow f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in (0, +\infty)$$

Άρα $f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = 2\eta\mu x + x\,, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2\eta\mu x + x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(2\frac{1}{x}\eta\mu x + 1\right)\right) = -\infty(0+1) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2\eta\mu x + x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(2\frac{1}{x}\eta\mu x + 1\right)\right) = +\infty(0+1) = +\infty$$

ΓΙΑΤΙ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right) \overset{y=1/x}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{y\to 0}\left(y\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 0$ **Ομοίως και για το $-\infty$.**

Θα δείξουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $\eta \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \eta$.

Είναι $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - \eta) = -\infty$ άρα υπάρχει $\chi 1$ κοντά στο $-\infty$, τέτοιο ώστε $f(x1) - \eta < 0 \Leftrightarrow f(x1) < \eta$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\eta)=+\infty$ υπάρχει χ2 κοντά στο $+\infty$, τέτοιο ώστε $f(x2)-\eta>0 \Leftrightarrow f(x2)>\eta$

Άρα $f(x1)<\eta<f(x2)$ άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει xo $\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(xo)=\eta$.

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΣΧΟΛΙΟ: Θα μπορούσαμε μόνον με τον υπολογισμό των δύο ορίων να είχαμε απαντήσει στο ερώτημα καθώς σύμφωνα με τις οδηγίες οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αναπόδεικτα την πρόταση: Αν μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σι,σ2) έχει την ιδιότητα: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$. Παραπάνω έχω γράψει και την απόδειξη η οποία θεωρώ ότι παρόλο που δεν χρειάζεται να την χρησιμοποιούν καλό θα ήταν να διδαχτεί έστω μία φόρα στους μαθητές.

γ) $\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}-2x-2\eta\mu2x=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}-f(2x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha(x-\mu)(\chi-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)-f(2x)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)}{(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)}=0$$

ΘΕΤΩ $\kappa(x)=\alpha(x-\mu)(\chi-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)-f(2x)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)=$

$$=\mathbf{g(x)-f(2x)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)}\ ,x\in\mathbb{R}$$

Η κ είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$\kappa(\lambda)=\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)>0$ γιατί $\alpha>0$ και $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ με $\lambda<\mu<\nu$.

$\kappa(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu)<0$ γιατί $\beta>0$ και $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ με $\lambda<\mu<\nu$.

$\kappa(\nu)=\gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu)>0$ γιατί $\gamma>0$ και $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ με $\lambda<\mu<\nu$.

Άρα $\kappa(\lambda)\kappa(\mu)<0$ και $\kappa(\mu)\kappa(\nu)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano η κ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (λ,μ) και τουλάχιστον μία ρίζα στο (μ,ν). Άρα και η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}-2x-2\eta\mu2x=0$ τουλάχιστον μία ρίζα στο (λ,μ) και τουλάχιστον μία ρίζα στο (μ,ν).

δ) $g(x)=\alpha(x-\mu)(\chi-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ με $\lambda<\mu<\nu$.

Η g είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου Βαθμού άρα είναι της μορφής $g(x)=\delta x^2+\varepsilon x+\zeta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\delta,\varepsilon,\zeta\in\mathbb{R}$ και $\delta\neq0$.

Ισχύει ότι $g(1)=10 \Leftrightarrow \delta+\varepsilon+\zeta=10$ (1) και $g(0)=5 \Leftrightarrow \zeta=5$ (2) και

$g(2)=g(-2) \Leftrightarrow 4\delta+2\varepsilon+\zeta=4\delta-2\varepsilon+\zeta \Leftrightarrow 4\varepsilon=0 \Leftrightarrow \varepsilon=0$ (3) Άρα από (1),(2),(3) ισχύει ότι:

$$\mathbf{g(x)=5x^2+5=5(x^2+1)}\ ,x\in\mathbb{R}$$

ε) I) Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ Cf και Cg στο διάστημα [-π,π] στο οποίο $g(x) > f(x)$ έχει τύπο:

$$\mathbf{d(x) = g(x) - f(x)\ ,x\epsilon[-\pi,\pi]}$$

Η d είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών στο [-π,π] άρα από θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει και μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή. Άρα υπάρχουν σημεία της Cf στο [-π,π] όπου η κατακόρυφη αποστασή τους γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

II) Έστω ότι στην θέση x1 έχουμε το μέγιστο τότε:

$$d(x) \le d(x1) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \le g(x1) - f(x1) \Leftrightarrow g(x) - g(x1) \le f(x) - f(x1)$$

Ομοίως αν στην θέση x2 έχουμε ελάχιστο τότε:

$$d(x) \ge d(x2) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \ge g(x2) - f(x2) \Leftrightarrow g(x) - g(x2) \ge f(x) - f(x2)$$

Άρα υπάρχουν $\chi 1, \chi 2 \in [-\pi,\pi]$ τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{g(x) - g(x1) \le f(x) - f(x1)}$ και

$$\mathbf{g(x) - g(x2) \ge f(x) - f(x2)}$$