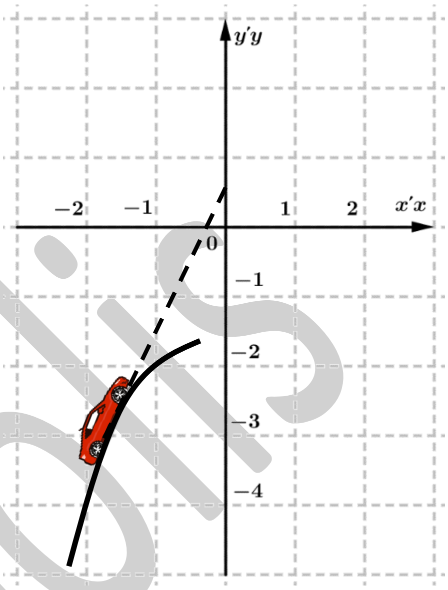
29η Άσκηση

2020-2021

Πρόβλημα στο Θεώρημα Rolle



Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της καμπύλης $y=f''(x)$ με $x\le 0$. Το αυτοκίνητο πλησιάζει τον άξονα y΄y και τα φώτα του δεν σχηματίζουν ποτέ ορθή γωνία με τον άξονα y΄y. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το αυτοκίνητο που κινείται και μέρος της καμπύλης της συνάρτησης f.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f'' αντιστρέφεται.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f''(\xi))$ με $\xi\in(-2,-1)$ τέτοιο ώστε τα φώτα του αυτοκινήτου, όταν βρίσκεται στο σημείο M, να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(-\infty,0]$.

δ) Αν $f''(-2)f''(1)<0$ και $f''(-1)f''(2)>0$ τότε να δείξετε ότι αν το αυτοκίνητο συνέχιζε να κινείται πάνω στην $y=f''(x)$ και για $x>0$, τα φώτα του αυτοκινήτου θα σχημάτιζαν ορθή γωνία με μία ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y σε τουλάχιστον ένα σημείο.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Τα φώτα του αυτοκινήτου παριστάνουν σε κάθε σημείο την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f'' για $x \le 0$. Αφού τα φώτα δεν σχηματίζουν για $x \le 0$ ορθή γωνία με τον άξονα y΄y, τότε η f'' δεν δέχεται εφαπτομένη κάθετη στον άξονα y΄y , δηλαδή οριζόντια εφαπτομένη άρα ισχύει $f^{(3)}(x) \ne 0$.
Έστω ότι η f'' δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$ τέτοια ώστε: $f''(x_1) = f''(x_2)$. Επειδή η f'' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2] \subseteq (-\infty, 0]$ τότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(x) = 0$ ΑΤΟΠΟ. Άρα η f'' είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

β) Τα φώτα του αυτοκινήτου παριστάνουν σε κάθε σημείο την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f'' για $x \le 0$. Η εφαπτομένη της στο $M(\xi, f''(\xi))$ είναι η $y - f''(\xi) = f^{(3)}(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει $-f''(\xi) = -\xi \cdot f^{(3)}(\xi) \Leftrightarrow \xi \cdot f^{(3)}(\xi) - f''(\xi) = 0$.

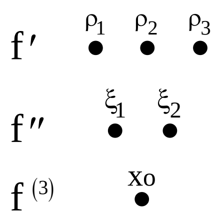
Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\xi \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $\xi \cdot f^{(3)}(\xi) - f''(\xi) = 0$

Έχουμε $xf^{(3)}(x) - f''(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - xf^{(3)}(x) = 0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f''(x) - xf^{(3)}(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f''(x)}{x}\right)' = 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f''(x)}{x}$, $x \in [-2, -1]$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \left(\dfrac{f''(x)}{x}\right)' = \dfrac{f''(x) - xf^{(3)}(x)}{x^2}$. Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι $f''(-1) = -2$ και $f''(-2) = -4$ άρα $g(-2) = \dfrac{f''(-2)}{-2} = 2 = \dfrac{f''(-1)}{-1} = g(-1)$. Έπεται λοιπόν από το Θεώρημα Rolle ότι υπάρχει $\xi \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\xi) - \xi f^{(3)}(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f^{(3)}(\xi) - f''(\xi) = 0$$

γ) Έστω ότι στο $(-\infty, 0]$ η f' έχει 3 (ή περισσότερες) ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 \le 0$.
Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (-\infty, 0]$ και $[\rho_2, \rho_3] \subseteq (-\infty, 0]$ με $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3) = 0$. Τότε από θεώρημα Rolle θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-\infty, 0]$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3) \subseteq (-\infty, 0]$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$. Η f'' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (-\infty, 0]$ με $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$.



Τότε από θεώρημα Rolle θα υπάρχει $xo \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-\infty, 0]$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(x) = 0$ ΑΤΟΠΟ.
Άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(-\infty, 0]$.

δ) Είναι $f''(-2) < 0$, $f''(-2)f''(1) < 0$ άρα $f''(1) > 0$ και $f''(-1) < 0$, $f''(-1)f''(2) > 0$ άρα $f''(2) < 0$.
Η f'' είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ και $f''(-2)f''(1) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $k_1 \in (-2, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(k_1) = 0$. Επίσης η f'' είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και $f''(1)f''(2) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $k_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(k_2) = 0$. Η f'' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[k_1, k_2] \subseteq (-2, 2)$ και $f''(k_1) = f''(k_2) = 0$, άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει $k \in (k_1, k_2) \subseteq (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(k) = 0$.
Επειδή για κάθε $x \le 0$ είναι $f^{(3)}(x) \ne 0$ τότε $k > 0$.