

Δευτεροβάθμιες εξισώσεις: Ιστορικά προβλήματα



Mohammed ibn Musa **al-Khwarizmi** 790-850 μ.Χ, Βαγδάτη (σημερινό Ιράκ). Στο βιβλίο του **Hisab al-jabr w'al-muqabala** (825 μ.Χ) έγραψε στην εισαγωγή ότι γράφτηκε για να δείξει αυτό που είναι «ευκολότατο και πιο χρήσιμο στην αριθμητική, τέτοιο που οι άνθρωποι συνεχώς χρειάζονται σε περιπτώσεις κληρονομιάς, κληροδοτημάτων, χωρισμών, αγωγών και εμπορίου και σε όλες τις μεταξύ τους συναλλαγές, ή όπου η μέτρηση της γης, το σκάψιμο καναλιών, γεωμετρικοί υπολογισμοί και άλλα αντικείμενα διαφόρων ειδών εμπλέκονται». Με άλλα λόγια ο al-Khwarizmi ισχυριζόταν ότι έγραφε ένα πρακτικό εγχειρίδιο όχι ένα θεωρητικό. Ας δούμε μερικά από τα προβλήματα του:

1. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Πολλαπλασίασα το ένα από τα δύο μέρη με το άλλο. Μετά πολλαπλασίασα το ένα από τα δύο με τον εαυτό του και το γινόμενο του πολλαπλασιασμού με τον εαυτό του είναι τετραπλάσιο του γινομένου του ενός μέρους με το άλλο.
2. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Μετά, πολλαπλασίασα το κάθε ένα με τον εαυτό του και όταν πρόσθεσα τα γινόμενα, το άθροισμα ήταν 58.
3. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη και διαίρεσα το πρώτο με το δεύτερο και το δεύτερο με το πρώτο. Το άθροισμα των πηλίκων είναι $2\frac{1}{6}$.
4. Ένα νόμισμα μοιράζεται εξίσου μεταξύ ενός αριθμού ανθρώπων. Εάν προσθέσεις έναν άνθρωπο ακόμα και μοιράσεις πάλι, η αναλογία του κάθε ενός είναι ένα έκτο του νομίσματος λιγότερο από τη πρώτη φορά. Πόσοι άνθρωποι υπήρχαν καταρχήν; Είναι φανερό ότι τα προβλήματα του, δεν είναι «πρακτικά» όπως υποσχέθηκε στον πρόλογο.

Κατά τη περίοδο της Αναγέννησης, όταν η άλγεβρα έφτασε στην Ευρώπη, πολλοί συγγραφείς έγραψαν κείμενα εκθέτοντας ιδέες για την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αλλά πάλι, υπήρχαν λίγα προβλήματα που δεν ήταν αφηρημένα.



Girolamo Cardano (1501-1576 Ιταλία). Γιατρός που ασχολήθηκε και με τα μαθηματικά. Το έργο του, **Ars Magna** (1545) ήταν το πρώτο Λατινικό εγχειρίδιο αφιερωμένο αποκλειστικά στην Άλγεβρα. Τα προβλήματα που ακολουθούν είναι από αυτό το βιβλίο.

1. Υπήρχαν δύο συνεταιρισμοί εκ των οποίων ο ένας είχε τρία μέλη περισσότερα από τον άλλο. Μοίρασαν ίσο αριθμό χρυσών νομισμάτων μεταξύ των μελών τους. Ο αριθμός των χρυσών νομισμάτων που ήταν για μοίρασμα σε κάθε περίπτωση ήταν 93 περισσότερο από το σύνολο των μελών των δύο συνεταιρισμών και τα μέλη του μικρότερου συνεταιρισμού έλαβαν 6 περισσότερα χρυσά νομίσματα από τα μέλη του μεγαλύτερου συνεταιρισμού. Πόσα μέλη είχε κάθε συνεταιρισμός;

2. Ένας άνθρωπος πήγε στην αγορά τρεις φορές. Τη πρώτη φορά έφερε πίσω τα διπλάσια από όσα είχε πάρει μαζί του. Στη δεύτερη φορά, πήρε μαζί του το διπλό ποσό του και επέστρεψε με το ίδιο συν την τετραγωνική του ρίζα δύο φορές περισσότερο χρυσά νομίσματα. Όλα αυτά τα διατήρησε και επέστρεψε στην αγορά με αυτά για τρίτη φορά. Επέστρεψε, επιπλέον με 310 χρυσά νομίσματα. Πόσα χρυσά νομίσματα είχε πάρει μαζί του τη πρώτη φορά;

Προβλήματα για το σπίτι:

Τα πρώτα έξι είναι από την εργασία του al-Khwarizmi.

1. Πολλαπλασίασα το ένα τρίτο μιας ποσότητας συν ένα με το ένα τέταρτο της ίδιας ποσότητας και το γινόμενο είναι είκοσι. Ποιά είναι η ποσότητα;
2. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη και πολλαπλασιάζοντας το ένα από αυτά τα μέρη με το άλλο, το αποτέλεσμα ήταν είκοσι ένα. Ποιά ήταν τα μέρη;
3. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη, και αφού πολλαπλασίασα κάθε μέρος με τον εαυτό του, τα πρόσθεσα και πρόσθεσα στο άθροισμα τους την διαφορά των δύο μερών, και το σύνολο είναι πενήντα τέσσερα. Ποια είναι τα μέρη;
4. Βρείτε ένα αριθμό για τον οποίο, εάν το ένα τρίτο του προστεθεί στο 3 και το άθροισμα αφαιρεθεί από τον αριθμό, και το αποτέλεσμα πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, η απάντηση είναι ο αρχικός αριθμός.
5. Εάν αρχίσεις με έναν αριθμό, μετά αφαιρέσεις το ένα τρίτο του, μετά το ένα τέταρτο του, μετά το ένα πέμπτο του και μετά 4, και εάν μετά πολλαπλασιάσεις το αποτέλεσμα με τον εαυτό του, παίρνεις 12 παραπάνω από τον αρχικό αριθμό. Βρες τον αριθμό.

6. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Πολλαπλασίασα το ένα μέρος με το δέκα και το άλλο με τον εαυτό του και τα γινόμενα είναι τα ίδια. Ποιά είναι τα μέρη;

Τα δύο επόμενα προβλήματα είναι από την εργασία του Cardano.

7. Υπήρχαν δύο αρχηγοί ο κάθε ένας εκ των οποίων μοίρασε 48 χρυσά νομίσματα στους στρατιώτες του. Αυτός που είχε δύο στρατιώτες λιγότερους είχε 4 νομίσματα περισσότερα για τον κάθε στρατιώτη από τον άλλο. Πόσους στρατιώτες είχε κάθε αρχηγός;

8. Υπάρχει ένας αριθμός τέτοιος ώστε εάν δύο φορές η τετραγωνική του ρίζα προστεθεί σε αυτόν και εάν σε αυτό το άθροισμα δύο φορές η τετραγωνική του ρίζα προστεθεί, δίνει ένα σύνολο 10. Βρείτε τον αριθμό. (Υπόδειξη: Αντιμετωπίστε το με δύο βήματα, αρχίζοντας από το τελικό άθροισμα. Έστω ότι αυτό είναι x^2 ώστε να μπορέσετε εύκολα να βρείτε την τετραγωνική του ρίζα. Το τετράγωνο της λύσης θα είναι το πρώτο ποσό).

Τα επόμενα δύο προβλήματα είναι από την εργασία του Recorde.



Robert Record (1510-1558, Ουαλός). Και αυτός, αρχικά σπούδασε ιατρική. Αργότερα ασχολήθηκε και με την ιστορία και τα μαθηματικά. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την άλγεβρα στην Αγγλία. Εγγραψε μία σειρά από σχολικά εγχειρίδια, και μάλιστα στα Αγγλικά, πιστεύοντας ότι τα μαθηματικά δεν μπορεί να είναι μόνο για αυτούς που γνωρίζουν Λατινικά ή Ελληνικά. Τα προβλήματα είναι από το

βιβλίο του *The Whetstone of Witte* (1557) το οποίο θα το μεταφράζαμε *Το Ακονιστήρι της εξυπνάδας*. Αξίζει τον κόπο να σταθούμε λίγο στον τίτλο που επέλεξε ο Record: *Cosa* είναι η λατινικά το «πράγμα» και το χρησιμοποιούσαν για τον άγνωστο. Οι αλγεβριστές ονομάζονταν *cossists* και η άλγεβρα για πολλά χρόνια ήταν γνωστή ως η *cossic* τέχνη. (Το 1525 ο Rudolff δημοσίευσε το βιβλίο *Coss* το οποίο ήταν το πρώτο Γερμανικό εγχειρίδιο άλγεβρας). Η λέξη *cos* είναι η Λατινική λέξη για το *whetstone*, μία πέτρα για να ακονίζονται ξυράφια και εργαλεία.

9. Υπήρχαν δύο άνθρωποι που είχαν κάποια χρηματικά ποσά, έτσι ώστε το άθροισμα των ποσών του δεύτερου ήταν $3 \frac{1}{4}$ φορές του πρώτου. Εάν οι δύο ποσότητες τους

πολλαπλασιάζονταν μεταξύ τους και σε αυτό το σύνολο προστίθεντο οι δύο ποσότητες, θα ανέρχονταν σε $142 \frac{1}{2}$. Πόσα είχε ο καθένας;

10. Υπάρχει ένας αριθμός, τον οποίο έχω ξεχάσει, και διαιρείται σε δύο μέρη, το πρώτο εκ των οποίων έχω επίσης ξεχάσει. Αλλά το δεύτερο ήταν 4 και θυμάμαι πάντως πως εάν το μέρος που έχω ξεχάσει πολλαπλασιάζονταν με τον εαυτό του και επίσης με 4, αυτοί οι δύο αριθμοί θα είχαν άθροισμα 117. Θα ήθελα να ξέρω ποιός ήταν ο αρχικός αριθμός και ποιά ήταν το μέρος του που ξέχασα.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ (οι εργασίες 1 και 2 είναι προαιρετικές)

1. Ο al-Khwarizmi είναι ένας από τους Άραβες μαθηματικούς. Με τον όρο Αραβικά μαθηματικά έχει χαρακτηριστεί από τους ιστορικούς των μαθηματικών, το συνολικό έργο μαθηματικών από την Περσία, το Ιράκ κλπ. Σε αυτόν ειδικά οφείλουμε τις λέξεις άλγεβρα και αλγόριθμος.
Να γίνει συνοπτική παρουσίαση της ζωής του.
Να γίνει συνοπτική παρουσίαση των Αραβικών μαθηματικών.
2. Ο Cardano είναι ένας από τους Ιταλούς μαθηματικούς οι οποίοι για κάποια ιστορική περίοδο ασχολήθηκαν με την άλγεβρα και ειδικότερα με την επίλυση εξισώσεων
Να παρουσιάσετε τους σημαντικότερους από τους Ιταλούς αλγεβριστές , καθώς και το έργο τους.
3. Να εκφράσετε την άποψη σας σχετικά με όλα τα παραπάνω προβλήματα, όσον αφορά στο ενδιαφέρον που σας προκαλούν, την χρησιμότητα τους ή οτιδήποτε άλλο.